Physics Lab. 2023 量子班

著者：中澤正樹

量子論ベーシック：波動関数とは? スピンとは?

1　ミンコフスキー時空

1.1　座標

時空 M 内の点 $x \in M$ に対して写像 ϕ によって座標 $\{x^\mu\} = \phi(x) \in \mathbb{R}^n$ を与える。また $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\big|_x\}$ を基底として接空間 T_xM が得られる。

1.2　時空の対称性

今の時空では計量 $g|_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R},\ (v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_x, w^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}|_x) \mapsto g_{\mu\nu}(x)v^\mu w^\nu$ を定義できる。$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ となる座標を慣性系といい、この時空では自然な慣性系 $\phi_{\mathrm{n}}(x) = \{x^\mu\}$ をとれる。

ある点 x で自然な慣性系 $\{x^\mu\}$ を取ると、それと $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ の関係にある慣性系 $\{x'^\mu\}$ がある ($\Lambda^\mu{}_\nu \in \mathrm{SO}(1,3)$, $a^\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$)。一方 $\{x'^\mu\}$ を自然な慣性系にする**点 x' への変換** $x \to x' = (\Lambda, a)x$ が考えられ $(\Lambda, a)(\Lambda', a')x = (\Lambda\Lambda', \Lambda a' + a)x$ よりこの変換全体は並進群 $\mathcal{T}$ とローレンツ群 $\mathcal{L}$ で $\mathcal{P} = \mathcal{T} \rtimes \mathcal{L}$ と書かれる群をなす。これを**ポアンカレ群**と呼ぶ。

1.3　状態

すべての状態を集めた空間を V とする。上記対称性を背景に $|\phi\rangle \in V \mapsto |\phi'\rangle = U(\Lambda, a)\,|\phi\rangle$ で、確率を保存する ($\langle\psi\,|\,\phi\rangle = \langle\psi'\,|\,\phi'\rangle$) **対称性変換**を定義する。ただし、$U(\Lambda, a)U(\Lambda', a') = U(\Lambda\Lambda', \Lambda a + a')$ とする。これらの定義から $U(\Lambda, a)$ がユニタリで [1]、$U(\Lambda, a)$ 全体がポアンカレ群をなせば良い。つまり、ポアンカレ群のユニタリ表現が $U(\Lambda, a)$ で、その表現空間は一粒子状態空間 $W \subset V$ である。

1.4　ユニタリ表現

ポアンカレ群のユニタリ表現 $U(\Lambda, a)$ を求める。まず運動量演算子を $\hat{k}^\mu$ として $\mathcal{T}$ のユニタリ表現を $U(a) = e^{ia_\mu \hat{k}^\mu}$ とかける。

$\hat{k}^\mu$ の固有値 k^μ とそれ以外の自由度 ξ を用いて表現基底を $\{|k^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle\}$ とすると、$L(p)\,|k^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle = |p^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle$ を定義できて、$Q(\Lambda)\,|k^\mu\rangle = |k^\mu\rangle$ が存在する．よって **$\mathcal{L}$ のユニタリ表現を $U(\Lambda) = L(p)Q(\Lambda)$ とかける** [2]。$Q(\Lambda)$ の ξ への作用を仮に S でかくと，

$$L(p)\,|k^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle = |p^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle\,,$$
$$Q(\Lambda)\,|k^\mu\rangle \otimes |\xi\rangle = |k^\mu\rangle \otimes \sum_{\xi'} S_{\xi'\xi}\,|\xi'\rangle\,.$$

質量あり ($k_\mu k^\mu < 0$) の場合、$Q \cong \mathrm{SO}(3)$ となり，Q の生成子は $J_i (i = 1,2,3)$ s.t. $[J_i, J_j] = \mathrm{i}\,\varepsilon_{ijk}J_k$。例えば $s = \dfrac{1}{2}$ の場合を選ぶと $S = \exp(\theta_i\sigma_i)$ となる。ξ を**スピン自由度**と呼ぶ。

1.5　場

状態空間 V で、$|\cdots\rangle \in V$ に作用して一粒子を加える生成演算子 $|p^\mu, \xi; \cdots\rangle = \hat{a}^\dagger(p^\mu, \xi)\,|\cdots\rangle$ を定義する。逆の、一粒子を消す消滅演算子 $\hat{a}(p^\mu, \xi)\,|p^\mu, \xi; \cdots\rangle = |\cdots\rangle$ も定義する。**場の演算子** $\hat{\psi}$ は、

$$\begin{aligned} &U(\Lambda, a)\hat{\psi}^A(x)U^{-1}(\Lambda, a) \\ &= D^A{}_B(\Lambda^{-1})\hat{\psi}^B(\Lambda x + a) \end{aligned}$$

の変換性をもつもので、

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^A(x) = \sum_\xi \int d^3p[&u^A e^{ipx}\hat{a}(p^\mu, \xi) \\ &+ v^A e^{-ipx}\hat{a}^\dagger(p^\mu, \xi)] \end{aligned}$$

と書かれる。D は**ローレンツ変換**の恒等表現 (スカラー)、ベクトル表現、あるいはスピノル表現である [1]。

1.6　一粒子波動関数

1 粒子状態の**波動関数** $\phi^A(x)$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \phi^A(x) &\propto \langle 0|\hat{\psi}^A(x)|p^\mu, \xi\rangle \\ &\propto u^A e^{ipx}. \end{aligned}$$

2　「曲がった時空」

曲がった時空で局所的に慣性系を取ると $g_{ij}(x)v^i w^j = \eta_{\hat{M}\hat{N}}a^{\hat{M}}(x)b^{\hat{N}}(x)$ であり、$a'^{\hat{L}}(x) = \Lambda^{\hat{L}}{}_{\hat{M}}(x)a^{\hat{M}}(x)$, $b'^{\hat{K}}(x) = \Lambda^{\hat{K}}{}_{\hat{N}}(x)b^{\hat{N}}(x)$ と取り直しても良いことから**局所ローレンツ変換**分の自由度がある [3]。異なる変換性の脚をハットをつけて区別した。

2.1　原理と方程式の構成

法則を「作用 $\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}(\psi, \partial\psi)$ を極小にする ψ が実現する」という形式で書く。我々が座標を思いつくか否かによらず物理的実現はあると思うので、法則は座標変換で不変であると仮定する (**相対性原理**)。またゲージ変換 $\psi(x)^{\bar{N}} \mapsto U(x)^{\bar{N}}{}_{\bar{M}}\psi(x)^{\bar{M}}$ でも法則が不変だと仮定する (**ゲージ原理**)。

法則が不変とは上記形式では $\mathcal{L}$ が (全微分を除いて) 不変だということであり、$\partial\psi$ には ψ と同じ変換性を持って欲しい。そのため $\partial\psi \to \partial_M\psi^{\hat{N}\bar{N}} + \omega_M{}^{\hat{N}}{}_{\hat{L}}\psi^{\hat{L}\bar{N}} + A_M{}^{\bar{N}}{}_{\bar{L}}\psi^{\hat{N}\bar{L}}$(共変微分) とする。ハット、バーの変換性から出てきた**接続** ω, A が方程式に現れる。

参考文献

[1] S.Weinberg. “場の量子論（1 巻）粒子と量子場” (1997).
[2] 大貫義郎. “ポアンカレ群と波動方程式” (1976).
[3] I. Ueba. “Spinors in curved spacetime” (2019).

数理物理班の皆さんは協力ありがとうございました。