Physics Lab. 2023 量子班

著者：梅川舜

擬確率分布と量子化の一般論

1　はじめに

量子論においては、物理量は演算子として表され、その値が確定した状態はその演算子の固有ベクトルによって表されます。そのため、互いに非可換な物理量の値は同時に確定しません。

2　擬確率分布と量子化

2.1　擬確率

物理量の非可換性により、複数の物理量についての同時確率分布は定義できません。しかし、負の値や複素数を許容すれば「確率のようなもの」を何通りも定められることが知られていて、それらは**擬確率分布**と呼ばれています。

2.2　量子化

古典的な物理量から対応する量子物理量を構成することを**量子化**と言います。量子化の方法もまた物理量の非可換性に起因する任意性があります。

$$xp \to \hat{x}\hat{p} \,\mathrm{or}\, \hat{p}\hat{x} \,\mathrm{or}\ldots \tag{1}$$

2.3　双対性

擬確率と量子化の一般的な枠組みにおいては **QJSD** $\hat{\#}(\boldsymbol{a})$ を用いて以下のように定式化されています [1]。

$$P_\rho(\boldsymbol{a}) = \mathrm{Tr}[\hat{\#}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})\,\hat{\rho}], \tag{2}$$

$$\hat{f}(\hat{\boldsymbol{A}}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{a})\,\hat{\#}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}^n\boldsymbol{a} \tag{3}$$

任意性は QJSD の部分が持ち、擬確率分布の定め方と量子化の方法は**双対関係**にあります。

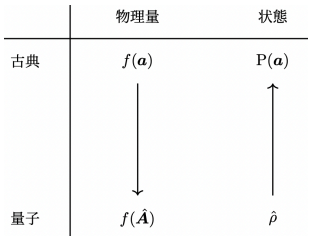

図 1: 擬確率と量子化の双対性

3　二準位系での擬確率分布

3.1　二準位系

状態が 2 次元ベクトルによって記述されるような系を二準位系と言います。二準位系の状態は 3 方向のスピンの期待値によっても決定されます。

$$|\psi(\theta,\phi)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

3.2　取り得る値

量子論では物理量の観測値はその固有値に限られるので、二準位系のように状態空間が有限次元であるような系では物理量の**「取り得る値」**は離散的になります。ところが一般には「取り得る値」でないところでの擬確率は 0 になりません。

3.3　Kirkwood-Dirac 分布

二準位系での擬確率分布については、QJSD を

$$\hat{\#}^{\mathrm{K}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}) := \mathcal{F}^{-1}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{-is_k\hat{A}_k}\right) \tag{5}$$

に選んだものとして定義される Kirkwood-Dirac 分布が以下の性質を満たす良い擬確率分布となっています [2]。

命題 1　物理量 $\boldsymbol{A}$ についての Kirkwood-Dirac 分布は $\boldsymbol{A}$ の「取り得る値」だけで値を持つ。

命題 2　二準位系の状態は 2 つの非可換な物理量についての Kirkwood-Dirac 分布で決定できる。

3.4　発展

逆に、擬確率分布がある性質を満たすための QJSD に対する条件

命題 3　二準位系の状態は 2 つの物理量についての擬確率分布で決定できる $\Longleftrightarrow$ QJSD が非エルミート

や、三準位系でも同様の性質が成り立つことがわかっていて、一般の有限準位系について言えることもあります [2]。また、擬確率分布には、量子情報などで使われる Aharonov 弱値という量への応用も知られています [1]。

参考文献

[1] J. Lee and I. Tsutsui. “A general framework of quasi-probabilities and the statistical behaviour of non-commuting quantum observables” Springer proceedings in Mathematics and Statistics.

[2] S. Umekawa, J. Lee and N. Hatano. “Advantages of the kirkwood-dirac distribution among general quasi-probabilities for finite-state quantum systems” arXiv:2309.06838 (2023).