Physics Lab. 2023 統計物理班　　著者：中柴柊馬 (物理学科 3 年)

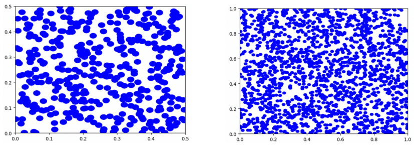
粗視化して系をマクロに見る

1　相とスケール

スケールを変えて見る

沢山の粒子 (原子、分子) からなる多体系のミクロな振る舞いはとても複雑！

・遠くから見てみると、系がおおまかにどうなっているかが見やすくなる

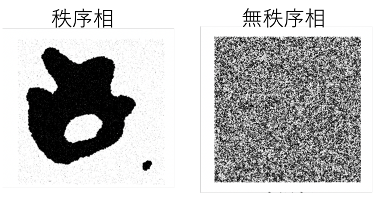


↑異なるスケールで同じ画像を見たもの。遠くからの方が、よりバラバラに見える

スケール変換と相の分類

多くの系は**秩序相**と**無秩序相**の 2 相を持つ。磁性体、超伝導体、などなど

・秩序相 (低温) では広範囲にわたってミクロな物理量が等しく、一方無秩序相 (高温) ではそれがバラバラ。

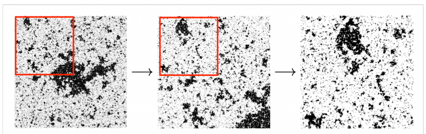


画像は[3]より引用

・遠くから見ると、系のマクロな特徴は増幅されるように見える。

秩序相にある系はより揃って見え、無秩序相にある系はよりバラバラに。

・一方、2 相の中間にある系、つまりちょうど相転移点 (**臨界点**) にある系は、遠くから見てもマクロな見た目が同じ ･･･ 臨界現象の**フラクタル**構造



画像は[3]より引用

↑臨界点にある系を徐々に拡大してみる

2　くりこみ群変換の導入

※厳密さを犠牲にして直感的な説明をします

「系のマクロな振る舞いは、ごく少数の要因 (物理的自由度) で決定される」

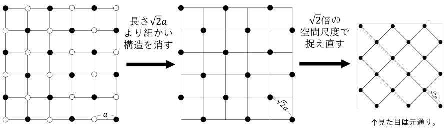
・マクロな性質を捉えるために, 余計な微視的自由度を潰したい → **粗視化**

・物理系の従う法則*1を変えるような書き換えはしたくない

⇒ 自由度を潰した上でスケール変換を施すことによって, 法則を変えずにマクロな自由度だけを抽出したい！

･･･ **くりこみ群変換***2の処方

イメージ (格子模型の例) ↓



・ただ単に自由度を消去するだけだと、系はより”スカスカになる”。

・自由度消去に応じてスケールを変換すると、物理パラメータ*3が変化する

→ くりこみ群変換は、自由度を消去した事による影響をパラメータの変化に”くりこむ (押し付ける)”変換。

3　変換の流れと固定点

パラメータがなす空間上の流れ

くりこみ群変換はパラメータの変換

→ パラメータがなす空間内を動かす

・くりこみ群変換による系の書き換えは、空間内での点の遷移に対応する

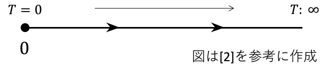
・変換の**固定点**は、系の相を分類する

イジングモデル*4の例

(i)1 次元イジング模型*5

・温度 0, ∞ の点を固定点に持ち (自明固定点と呼ばれる)、$T \neq 0$ の全ての点は変換で温度 ∞ の点に向かう。

つまり、$T \neq 0$ なら 1 次元 Ising 模型は必ず無秩序相 (自発磁化ゼロ)！



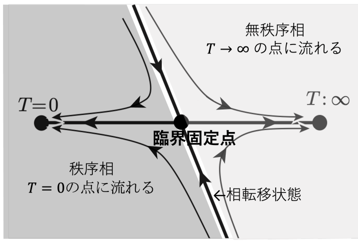
図は[2]を参考に作成

(ii)2 次元イジング模型

温度 0, ∞ の他、有限温度で**臨界固定点**を持つ → 「相転移がある」！

・左側領域にある点は秩序相に、右側の点は無秩序相に属する系と対応。

・臨界固定点に流れ込む領域も存在し (図の太線部)、この上の点は臨界点にある系と対応。くりこみ群変換の流れはこの領域を跨がない (下図)。



図は[1]および[2]を参考に作成

くりこみ群変換は、「同じ相の中で極限状態＝固定点に持っていく」変換。

→ 異なる固定点が異なる相と対応！

参考文献

[1] 高橋和孝, 西森秀稔. ”相転移・臨界現象とくりこみ群” 丸善出版 (2017).

[2] 菊池誠, 岡部豊. ”繰り込み群と物性物理学 臨界現象, そして多様な展開へ” 数理科学 vol.553 (2009): 29-35.

[3] 立川裕二. ”四次元ゲージ理論と二次元共形場理論の不思議な関係” arXiv:1108.5632v1 (2011).

---

*1 「法則の形」と言ったが、要するに系の Hamiltonian あるいは分配関数のこと。

*2 統計力学の言葉で言えば､「系の自由エネルギーの関数形を不変に保つようなやり方で、系のハミルトニアンをより自由度の小さい系のハミルトニアンに書き換える手続き」のこと。くりこみ「群」という名称の由来は、この変換が連続パラメータで記述され結合律を満たすから。

*3 Hamiltonian に登場する係数. 例えば, 隣接スピン同士の相互作用を記述する項にかかる係数など.

*4 格子状に「スピン (磁気モーメント)」を配置したモデルで、単純だが磁性体の性質をよく記述する。詳しくは [1] など

*5 この模型は有限温度で相転移を起こさないことが厳密に知られている。1 次元イジング模型の厳密解については [1] 等を参照。