

共形ブートストラップ

1 臨界現象と普遍性

水が液体と気体の間を相転移するのは日常的に馴染み深いですが、高温・高圧では液体と気体の区別がなくなることをご存知でしょうか。気液の区別がちょうど消失する点は**臨界点**と呼ばれる。

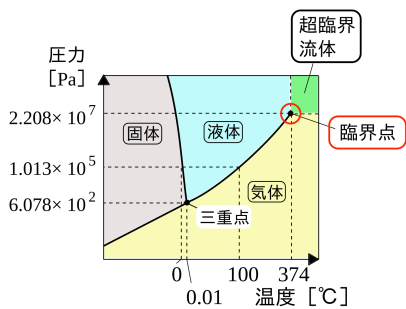


図 1: 水の状態図

臨界点を横切る転移は、2次相転移という分類に属しており、空間的な揺らぎの発散などによって特徴づけられる。また2次相転移の興味深い特徴として、**普遍性**がある。2次相転移において、臨界点付近での物理量の振る舞いを表す**臨界指数**という量があるのだが、これが(同じ空間次元と対称性をもつ)様々な実験系・理論モデルにおいて全く同じ値をとることが知られている。

例えば、気液相転移の臨界点と、単純な磁性体のモデルである3次元 Ising 模型は(実験、数値計算の誤差の範囲内で)どちらも同じ臨界指数を持つ。このことをもって2つの系は同じ**普遍類**に属するという。

2 くりこみ群

普遍性は定性的には**くりこみ群**の視点から理解される。限られたスペース

でこれを説明するのは難しいので、ここでは荒っぽいアナロジーで捉える。

くりこみ変換とは、粗視化を伴うスケール変換のことである。例えば、図2の左の画像に対し、画素の大きさを保ったまま縮小することを考える。これは幾何学的に厳密なスケール変換ではなく、微細な構造の粗視化を伴っている。実際、画像を元の大きさに拡大すると、ボケた画像が得られる。



図 2: 元画像(左)と縮小した画像(真ん中)と元の大きさに拡大した画像(右)。

統計物理学への応用では変換の対象は画像ではなく理論モデルである。くりこみ変換によって、微細な構造を持つ理論モデルから、微細な構造を忘れた有効理論が得られる。

3 共形場理論

臨界点にある系を無限に粗視化すると、やがてそれ以上変化しない固定点に到達すると考えられるが、それはどのような理論だろうか。くりこみ変換の固定点は定義からスケール変換 + 粗視化に対する不変性をもつが、実は物理的な固定点はより大きな**共形不変性**をもつ**共形場理論**であると信じられている。

共形不変性とは、ざっくり言うと場所によって倍率が異なるようなスケール変換に対する不変性である。臨界現象の普遍性は、くりこみ変換によって、臨界点にある異なる理論が同じ共形場理論に漸近していく振る舞いとして理解できる。

4 共形ブートストラップ

共形ブートストラップは、微視的なモデルの構造を全く仮定せず、共形不変性(と空間次元や対称性など基本的な情報)のみを仮定して、共形場理論の性質をどこまで探れるかという1つの試みである。手法の詳細は省略するが、大きな成果として、3次元 Ising 模型の臨界指数がモンテカルロ法を超える高精度で数値的に決定されている。

以下の図3は3次元臨界 Ising 模型に対して得られる共形次元(臨界指数の親玉と思ってもらえばいい)への制限を図示したものである。

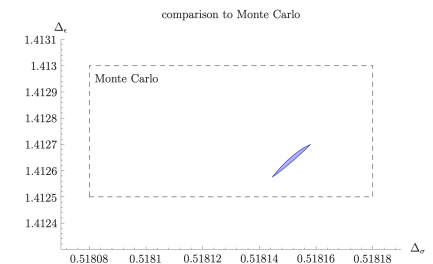


図 3: 3次元臨界 Ising 模型の共形次元の共形ブートストラップによる制限(青色の領域)と、モンテカルロ法による推定値(点線の枠内)。[\[3\]](#)より引用。

参考文献

- [1] 中山優, “高次元共形場理論への招待: 3次元臨界 Ising 模型を解く” サイエンス社 (2019).
- [2] David Simmons-Duffin, “TASI Lectures on the Conformal Bootstrap.” (2016),
- [3] David Simmons-Duffin, “A semidefinite program solver for the conformal bootstrap.” Journal of High Energy Physics 2015.6 (2015): 1-31.