λ 計算とその意味

Physics Lab. 2024　計算物理班　大野 浩輝

2024 年 9 月 22 日

λ 計算（ラムダ計算）は計算モデルの 1 つであり、計算という概念を、函数の評価としてモデル化するものである。もっとも基本的な λ 計算の体系である型なし λ 計算は、よく知られた Turing 機械などの計算モデルと等価な表現力をもったモデルであり、「計算可能な函数」という概念を定めている。一方で、λ 計算に型の概念を導入した型付き λ 計算は、Curry–Howard 対応によって数理論理学とも密接にかかわっている。Haskell などの函数型プログラミング言語や、Coq などの証明支援システムは、型付き λ 計算に基づいて設計されている。λ 計算はプログラミング言語の本質を抽象化したものであり、プログラミング言語の構文に宿る意味を研究するプログラム意味論においても重要な役割を果たす。

1 章と 2 章では、型なし λ 計算と型付き λ 計算の構文と計算規則を定義する。3 章では、λ 計算と論理の対応を解説する。4 章では、プログラム意味論のうち表示的意味論とよばれる分野の一端に触れる。定理の証明や込み入った話題の一部は付録に回している。

目次

1. 型なし λ 計算

この章では、**型なし λ 計算**を定義し、この計算モデルが Turing 完全であることを示す。

1.1. 構文と計算規則

「λ 計算」という名称は、函数を表すために λ という文字を用いることに由来する。たとえば、変数 x を受け取って fx という結果を返す函数を $\lambda x.fx$ と表すのである（函数 f を引数 x に適用したものは、$f(x)$ のように括弧を用いる代わりに、fx のようにつなげて表すのが慣習となっている）。この $\lambda x.fx$ という函数を変数 y に適用したものは、$(\lambda x.fx)y$ と表され、その計算結果は fy となる。

この節では、このような λ 計算の構文と計算規則を厳密に定義する。

λ 計算の構文

λ 計算の構文として、**λ 式**を定義する。

1.1. 定義（λ 式）

無限集合 $\mathcal{V}$ をとり、その要素を**変数**とよぶ。λ 式は以下の 3 つの規則によって生成される。

1. 変数 x は λ 式である。
2. **λ 抽象**： x が変数、M_1 が λ 式のとき、$(\lambda x.M_1)$ は λ 式である。
3. **適用**： M_1 と M_2 が λ 式のとき、(M_1M_2) は λ 式である。

ただし、構文の曖昧さが生じない範囲で括弧を省略する。このとき、λ 抽象によって束縛される部分はできるだけ長くとり、適用は左から順に行うものとする。たとえば、$\lambda x.\lambda y.xyy$ という λ 式は、括弧を省略せずに表すと $(\lambda x.(\lambda y.(xy)y))$ となる。

λ 式の中に現れる変数のうち、λ 抽象によって束縛されているもの（$\lambda x.\cdots x\cdots$ のような形で現れるもの）を**束縛変数**、そうでないものを**自由変数**とよぶ。自由変数の正確な定義は以下のとおりである。

1.2. 定義（自由変数）

λ 式 M に現れる自由変数の集合 $\mathrm{FV}(M)$ を、M の構造に関して帰納的に定義する [1)]。

1. $M = x$（変数）のとき、$\mathrm{FV}(M) = \{x\}$
2. $M = \lambda x.M_1$ のとき、$\mathrm{FV}(M) = \mathrm{FV}(M_1) \setminus \{x\}$
3. $M = M_1M_2$ のとき、$\mathrm{FV}(M) = \mathrm{FV}(M_1) \cup \mathrm{FV}(M_2)$

1) $X \setminus Y \coloneqq \{x \in X \mid x \notin Y\}$ は集合 X, Y の差集合を表す。

自由変数を含まない λ 式（$\mathrm{FV}(M)=\emptyset$ であるような M）を**閉 λ 式**あるいは**コンビネータ**とよぶ。たとえば、$\lambda x.x$ は閉 λ 式であるが、$\lambda x.y$ は自由変数 y を含んでいるから閉 λ 式ではない。

λ 計算の計算規則

上述のように、$\lambda x.M$ という λ 式は変数 x を受け取って M を返す函数を表現している。そのことを計算規則という形で形式的に定義しよう。λ 計算の計算規則には **α 変換**と **β 簡約**がある（さらに **η 簡約**を認めることもあるが、補足として紹介するだけにとどめる）。

$\lambda x.M$ における束縛変数 x は仮の変数であり、別の変数に置きかえて $\lambda y.M[x:=y]$ としても意味は変わらないはずである（ここで、$M[x:=y]$ は M に現れる自由変数 x に y を**代入**[2]したものを表している）。このような変数名の置きかえを α 変換とよぶ。

1.3. 定義（α 変換）

λ 式の 2 項関係 $\underset{\alpha}{=}$ を、以下の 2 つの条件をみたす最小の同値関係[3]として定義する。

1. $\lambda x.M \underset{\alpha}{=} \lambda y.M[x:=y]$（$y \notin \mathrm{FV}(M)$のとき）
2. $M \underset{\alpha}{=} M'$ のとき、$\lambda x.M \underset{\alpha}{=} \lambda x.M',\ MN \underset{\alpha}{=} M'N,\ NM \underset{\alpha}{=} NM'$

$M \underset{\alpha}{=} N$ が成り立つとき、M と N は **α 同値**であるという。

以下では、α 同値な λ 式は同一視する（$\underset{\alpha}{=}$ による同値類を、その代表元によって表記する）ことにする。

函数をある引数に適用して値を求めることを**評価**とよぶ。β 簡約は λ 式を評価する方法を定める規則である。$(\lambda x.M)N$ という λ 式を評価すると、M に現れる自由変数 x に N を代入した $M[x:=N]$ が得られる。

1.4. 定義（β 簡約）

λ 式の 2 項関係 $\underset{\beta}{\to}$ を、以下の 2 つの条件をみたす最小の 2 項関係として定義する。

1. $(\lambda x.M)N \underset{\beta}{\to} M[x:=N]$
2. $M \underset{\beta}{\to} M'$ のとき、$\lambda x.M \underset{\beta}{\to} \lambda x.M',\ MN \underset{\beta}{\to} M'N,\ NM \underset{\beta}{\to} NM'$

さらに、2 項関係 $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ を、$\underset{\beta}{\to}$ を含み、反射律と推移律をみたす最小の 2 項関係として定義する。$M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$ が成り立つとき、M は N に β 簡約されるという。

β 簡約の結果は元と同じ函数を表現していると考えられる。このことを表す同値関係 $\underset{\beta}{=}$ を導入しよう。

---

[2] 代入の定義については下の補足を参照されたい。

[3] 集合 X 上の 2 項関係 $\sim$ が同値関係であるとは、以下の 3 つの条件が成り立つことをいう。

1. 任意の $x \in X$ に対して、$x \sim x$（反射律）
2. 任意の $x, y \in X$ に対して、$x \sim y$ ならば、$y \sim x$（対称律）
3. 任意の $x, y, z \in X$ に対して、$x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば、$x \sim z$（推移律）

1.5. 定義（β 変換）

λ 式の 2 項関係 $\underset{\beta}{=}$ を、$\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ を含む最小の同値関係として定義する。$M \underset{\beta}{=} N$ が成り立つとき、M と N は β **同値**であるという。

以上の計算規則によって、λ 式を函数として解釈し、評価することができるようになった。λ 計算とは、λ 式という構文と、（α 変換および）β 簡約という計算規則を備えた計算モデルのことである。

補足： 代入の定義

代入 $M[x := N]$ を行う際には、M の中に現れる自由変数 x を N に置きかえるのが原則であるが、変数名が重複する場合には注意が必要である。たとえば、$(\lambda x.xy)[y := x] = \lambda x.xx$ とするのは間違いであり、α 変換を行って $(\lambda x.xy)[y := x] = (\lambda z.zy)[y := x] = \lambda z.zx$ のようにしなければならない。このような場合も含めた正確な定義は以下のようになる。

1.6. 定義（代入）

λ 式 M, N と変数 x に対して、代入 $M[x := N]$ を、M の構造に関して帰納的に定義する。

1. $M = y$（変数）のとき、$M[x := N] = \begin{cases} N & (y = x \text{ のとき}) \\ y & (y \neq x \text{ のとき}) \end{cases}$
2. $M = \lambda y.M_1$ のとき、$M[x := N] = \lambda y'.M_1[y := y'][x := N]$（ただし、$y' \notin \{x\} \cup \mathrm{FV}(M_1) \cup \mathrm{FV}(N)$）
3. $M = M_1M_2$ のとき、$M[x := N] = M_1[x := N]M_2[x := N]$

以降の定理の証明などでは単に $(\lambda y.M_1)[x := N] = \lambda y.M_1[x := N]$ が成り立つものとしているが、これは便宜上、変数名の重複が α 変換によってつねに回避されているものと仮定しているためであり、一般性は失われていないということに注意されたい。

補足： η 簡約

$\lambda x.Mx$（$x \notin \mathrm{FV}(M)$）という λ 式は、x を受け取って Mx を返す函数を表現している。一方で、M は $\lambda x.Mx$ と β 同値ではないが、同じく x を受け取って Mx を返す函数を表現している。一般に、λ 式 M, N に対して $Mx \underset{\beta}{=} Nx$ が成り立つとき、M と N は**外延的**に等しいという。

1.7. 定義（η 簡約）

λ 式の 2 項関係 $\underset{\eta}{\to}$ を、以下の 2 つの条件をみたす最小の 2 項関係として定義する。

1. $\lambda x.Mx \underset{\eta}{\to} M$（$x \notin \mathrm{FV}(M)$ のとき）
2. $M \underset{\eta}{\to} M'$ のとき、$\lambda x.M \underset{\eta}{\to} \lambda x.M'$, $MN \underset{\eta}{\to} M'N$, $NM \underset{\eta}{\to} NM'$

さらに、2 項関係 $\underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow}$ を、$\underset{\beta}{\to}$ と $\underset{\eta}{\to}$ を含み、反射律と推移律をみたす最小の 2 項関係として定義し、2 項関係 $\underset{\beta\eta}{=}$ を、$\underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow}$ を含む最小の同値関係として定義する。$M \underset{\beta\eta}{=} N$ が成り立つとき、M と N は $\boldsymbol{\beta\eta}$ **同値**であるという。

2 つの λ 式が $\beta\eta$ 同値であることは、それらが外延的に等しいことを意味する。

補足： 多変数函数の扱い

λ 抽象の構文は、変数を 1 つ受け取って結果を返す 1 変数函数を表現するための記法である。しかし、λ 式によって多変数函数を表現することはできないのかというと、そうではない。たとえば、x, y を受け取って M を返す 2 変数函数は、見方を変えれば、x を受け取って「y を受け取って M を返す函数」を返す函数ともみなせる（これを Curry 化とよぶ)。そのため、この函数は $\lambda x.\lambda y.M$ という λ 式によって表現できる。一般に、$f(x_1, \cdots, x_n)$ という n 変数函数は、$\lambda x_1.\cdots\lambda x_n.f(x_1, \cdots, x_n)$ という λ 式によって表現される。

問題

(1) $M \coloneqq (\lambda x.\lambda y.\lambda z.y(xyz))(\lambda x.\lambda y.y)$ に対して、$M \underset{\beta}{\to} M_1 \underset{\beta}{\to} M_2 \underset{\beta}{\to} M_3 \underset{\eta}{\to} M_4$ となるような M_1, M_2, M_3, M_4 を求めなさい。

1.2. 評価戦略

λ 式の中に現れる $(\lambda x.M)N$ という形の部分を $\boldsymbol{\beta}$ **基**とよぶ。β 簡約は β 基 $(\lambda x.M)N$ を $M[x \coloneqq N]$ に書きかえていく操作である。

λ 式 N に対して、$N \underset{\beta}{\to} N'$ となるような λ 式 N' が存在しないとき、N は $\boldsymbol{\beta}$ **正規形**であるという。これは、N が β 基をもたないことと同値である。λ 式 M に対して、$M \underset{\beta}{=} N$ をみたす β 正規形 N が存在するとき、M は**弱** $\boldsymbol{\beta}$ **正規化可能**であるといい、N は M の β 正規形であるという。

弱 β 正規化不可能な λ 式も存在する。たとえば、$(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ はどのように β 簡約を行っても β 正規形にたどり着くことはない。

λ 式の中に β 基が複数ある場合、どの β 基を書きかえて β 簡約を行うかによって異なる λ 式が得られる場合がある。たとえば、

$$\underline{\big(\lambda x.\underline{(\lambda y.y)x}\big)(\lambda z.z)}$$

という λ 式は、下線を引いた 2 つの β 基のどちらを選んでも β 簡約を進めることができて、

$$\underline{(\lambda x.(\lambda y.yx)x)(\lambda z.z)} \underset{\beta}{\to} (\lambda y.y(\lambda z.z))(\lambda z.z) \underset{\beta}{\to} (\lambda z.z)(\lambda z.z) \underset{\beta}{\to} \lambda z.z$$

$$\big(\lambda x.\underline{(\lambda y.yx)x}\big)(\lambda z.z) \underset{\beta}{\to} (\lambda x.xx)(\lambda z.z) \underset{\beta}{\to} (\lambda z.z)(\lambda z.z) \underset{\beta}{\to} \lambda z.z$$

となる。この例では、簡約の過程は異なるが、最終的に同じ結果に合流する。一般に、簡約の途中で異なる過程に分岐しても、そこからさらに簡約することによって、ふたたび同じ λ 式に合流できることが知られている。

1.8. 定理（Church–Rosser）

$M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N_1$ かつ $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N_2$ ならば、λ 式 L が存在して、$N_1 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ かつ $N_2 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ をみたす。

<u>証明</u>

付録 A.1 で証明する。 ■

この定理が成り立つことをもって、λ 計算は **Church–Rosser 性**あるいは**合流性**をもつといわれる。Church–Rosser の定理からは、ほかにも以下のような重要な性質が導かれる。

1.9. 定理

以下の命題が成り立つ。

(i) $M \underset{\beta}{=} N$ ならば、λ 式 L が存在して、$M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ かつ $N \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ をみたす。

(ii) N が M の β 正規形ならば、$M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$ である。

(iii) 各 λ 式はたかだか 1 つの β 正規形をもつ。

β 正規形をもつ λ 式であっても、簡約する β 基の選び方によっては、その β 正規形に永遠にたどり着けない場合がある。M から始まって無限に続く β 簡約の列 $M \underset{\beta}{\to} M_1 \underset{\beta}{\to} M_2 \underset{\beta}{\to} \cdots$ が存在しないような λ 式 M は**強 β 正規化可能**であるという。強 β 正規化可能な λ 式は明らかに弱 β 正規化可能でもあるが、弱 β 正規化可能な λ 式は必ずしも強 β 正規化可能とは限らないのである。たとえば、

$$\underline{(\lambda x.\lambda y.y)\big(\underline{(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)}\big)}$$

という λ 式に対して、左側の β 基を書きかえると、

$$\underline{(\lambda x.\lambda y.y)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))} \underset{\beta}{\to} \lambda y.y$$

のように β 正規形が得られるが、右側の β 基を書きかえると、

$$(\lambda x.\lambda y.y)\big(\underline{(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)}\big) \underset{\beta}{\to} (\lambda x.\lambda y.y)\big(\underline{(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)}\big) \underset{\beta}{\to} \cdots$$

のように無限に続く β 簡約の列を作ることができる。

弱 β 正規化可能な任意の λ 式に対して、有限のステップで β 正規形を必ず得ることができるアルゴリズムはあるのだろうか？ 以下に示す**最左簡約**がその答えを与える。これは、λ 式

の中にある β 基のうち、その左端がもっとも左側にあるものをつねに選んで書きかえることによって β 簡約を行う評価戦略である。

1.10. 定義（最左簡約）

λ 式の 2 項関係 $\underset{l}{\to}$ を、以下の 3 つの条件をみたす最小の 2 項関係として定義する。

1. $(\lambda x.M)N \underset{l}{\to} M[x := N]$
2. $M \underset{l}{\to} M'$ で、M が λ 抽象でないとき、$MN \underset{l}{\to} M'N$
3. $M \underset{l}{\to} M'$ で、N が λ 抽象でない β 正規形のとき、$NM \underset{l}{\to} NM'$

さらに、2 項関係 $\underset{l}{\twoheadrightarrow}$ を、$\underset{l}{\to}$ を含み、反射律と推移律をみたす最小の 2 項関係として定義する。

1.11. 定理（最左簡約）

λ 式 M が β 正規形 N をもつならば、$M \underset{l}{\twoheadrightarrow} N$ が成り立つ。

証明

付録 A.2 で証明する。 ■

逆に、左端がもっとも右側にある β 基をつねに選ぶ**最右簡約**は、強 β 正規化不可能な λ 式に対して必ず無限に続く β 簡約の列を与える。このような評価戦略を正格評価とよび、そうでない（最左簡約のような）評価戦略を遅延評価とよぶ。

問題

(1) 定理 1.9 を証明しなさい。

1.3. さまざまなデータの表現

λ 式を用いて、自然数、真理値、順序対、リストなどのデータや、それらに対する演算を表現することができる。以下に挙げる表現は **Church 表現**とよばれるものである。

自然数

自然数の表現は、自然数 0 を表す zero と、自然数 n を受け取ってその後者の自然数 $n+1$ を返す函数 succ によって定義される [4]。

$$\mathsf{zero} := \lambda s.\lambda z.z$$
$$\mathsf{succ}\, n := \lambda s.\lambda z.s(nsz)$$

これらを用いると、自然数 0, 1, 2, 3 の表現 $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ は以下のようになる。

[4] $\mathsf{succ}\, n := \cdots$ は $\mathsf{succ} := \lambda n.\cdots$ の略記である。

$$\hat{0} = \mathsf{zero} = \lambda s.\lambda z.z$$

$$\hat{1} = \mathsf{succ}\,\mathsf{zero} \underset{\beta}{=} \lambda s.\lambda z.sz$$

$$\hat{2} = \mathsf{succ}(\mathsf{succ}\,\mathsf{zero}) \underset{\beta}{=} \lambda s.\lambda z.s(sz)$$

$$\hat{3} = \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}\,\mathsf{zero})) \underset{\beta}{=} \lambda s.\lambda z.s(s(sz))$$

すなわち、自然数 n の Church 表現に対して函数 f を与えると、それを n 回合成した函数 $\lambda x.f^n x$ が返される。

Church 表現を用いて、四則演算などといった自然数に対する演算が定義できるが、それについてはあとで述べることにする。

真理値

真理値とは命題の真偽を表す値であり、true（真）と false（偽）がある。これらはそれぞれ

$$\mathsf{true} := \lambda t.\lambda f.t$$

$$\mathsf{false} := \lambda t.\lambda f.f$$

という λ 式によって表現される。

真理値の Church 表現 b に対して、条件が真の場合の値 t と、偽の場合の値 f を与えれば、条件分岐（プログラミング言語における if 文）が達成される。

$$btf \underset{\beta}{=} \begin{cases} t & (b = \mathsf{true}\ \text{のとき}) \\ f & (b = \mathsf{false}\ \text{のとき}) \end{cases}$$

and, or, not などの論理演算も、条件分岐を使って定義できる。

$$\mathsf{and} := \lambda b.\lambda c.bc\,\mathsf{false}$$

$$\mathsf{or} := \lambda b.\lambda c.b\,\mathsf{true}\,c$$

$$\mathsf{not} := \lambda b.b\,\mathsf{false}\,\mathsf{true}$$

順序対

順序対とは 2 つの値を順序付きの組にしたものである。a と b の順序対は

$$\mathsf{pair}\,ab := \lambda p.pab$$

という λ 式によって表現される。以下では、$\langle a, b\rangle := \mathsf{pair}\,ab$ という略記も用いる。

順序対の 1 番目と 2 番目の要素を取り出すために、射影 pr1, pr2 を以下のように定義する。

$$\mathsf{pr1} := \lambda p.p(\lambda x.\lambda y.x)$$

$$\mathsf{pr2} := \lambda p.p(\lambda x.\lambda y.y)$$

このとき、$\mathsf{pr1}\langle a, b\rangle \underset{\beta}{=} a$, $\mathsf{pr2}\langle a, b\rangle \underset{\beta}{=} b$ が成り立つ。

リスト

リストは、複数（0 個以上）の要素を順序付きで保持するデータ構造の 1 つである。リストの表現は、空のリストを表す nil と、値 h をリスト t の先頭に追加する関数 cons によって定義される。

$$\mathsf{nil} := \lambda c.\lambda n.n$$
$$\mathsf{cons}\,ht := \lambda c.\lambda n.ch(tcn)$$

これらを用いて、たとえば 3 つの要素からなるリスト $[a_1, a_2, a_3]$ は

$$[a_1, a_2, a_3] = \mathsf{cons}\,a_1(\mathsf{cons}\,a_2(\mathsf{cons}\,a_3\,\mathsf{nil})) \underset{\beta}{=} \lambda c.\lambda n.ca_1(ca_2(ca_3n))$$

と表現される。

リストの要素を取り出すためには、リストの最初の要素を返す関数 head と、最初の要素を除いたリストを返す関数 tail を用いる（便宜上、$\mathsf{head}\,\mathsf{nil} \underset{\beta}{=} \hat{0}$, $\mathsf{tail}\,\mathsf{nil} \underset{\beta}{=} \mathsf{nil}$ となるように定義する）。

$$\mathsf{head} := \lambda l.l(\lambda x.\lambda y.x)\,\hat{0}$$
$$\mathsf{tail} := \lambda l.\,\mathsf{pr2}(l(\lambda x.\lambda p.\langle \mathsf{cons}\,x(\mathsf{pr1}\,p), \mathsf{pr1}\,p\rangle)\langle \mathsf{nil}, \mathsf{nil}\rangle)$$

tail のはたらきを具体例によって理解しよう。$F := \lambda x.\lambda p.\langle \mathsf{cons}\,x(\mathsf{pr1}\,p), \mathsf{pr1}\,p\rangle$ とすると、$\mathsf{tail} = \lambda l.\,\mathsf{pr2}(lF\langle \mathsf{nil}, \mathsf{nil}\rangle)$ と表される。F の 2 番目の引数として順序対を与えると、

$$Fx\langle p_1, p_2\rangle \underset{\beta}{=} \langle \mathsf{cons}\,xp_1, p_1\rangle$$

となる。したがって、たとえば $\mathsf{tail}[a_1, a_2, a_3]$ を評価すると、

$$\begin{aligned}\mathsf{tail}[a_1, a_2, a_3] &\underset{\beta}{=} \mathsf{pr2}(Fa_1(Fa_2(Fa_3\langle \mathsf{nil}, \mathsf{nil}\rangle)))\\ &\underset{\beta}{=} \mathsf{pr2}(Fa_1(Fa_2\langle [a_3], \mathsf{nil}\rangle))\\ &\underset{\beta}{=} \mathsf{pr2}(Fa_1\langle [a_2, a_3], [a_3]\rangle)\\ &\underset{\beta}{=} \mathsf{pr2}\langle [a_1, a_2, a_3], [a_2, a_3]\rangle \underset{\beta}{=} [a_2, a_3]\end{aligned}$$

となり、$[a_1, a_2, a_3]$ の最初の要素を除いたリストが得られる。

自然数の演算

最初に、足し算と掛け算を定義しよう。自然数 m と n の和 $\mathsf{plus}\,mn$ は、m に対して関数 succ を n 回適用することによって得られるから、

$$\mathsf{plus} := \lambda m.\lambda n.n\,\mathsf{succ}\,m$$

によって定義できる。掛け算 $\mathsf{times}\,mn$ も同様にして

$$\mathsf{times} := \lambda m.\lambda n.n(\mathsf{plus}\,m)\,\hat{0}$$

のように定義できる。

次に、引き算を定義したい。そのために、まずは自然数 n を受け取ってその前者の自然数 $n-1$ を返す関数 pred を定義する（ただし、$\mathsf{pred}\,\hat{0} \underset{\beta}{=} \hat{0}$ となるようにする）。これはリストに対する関数 tail のときと同様にして、

$$\mathsf{pred} \coloneqq \lambda n.\,\mathsf{pr2}\Big(n(\lambda p.\langle \mathsf{succ}(\mathsf{pr1}\,p), \mathsf{pr1}\,p\rangle)\Big\langle \hat{0}, \hat{0}\Big\rangle\Big)$$

と定義できる。この pred を用いて、引き算 minus（自然数 m, n を受け取って自然数 $\max(m-n, 0)$ を返す関数）は

$$\mathsf{minus} \coloneqq \lambda m.\lambda n.n\,\mathsf{pred}\,m$$

と定義できる。

与えられた自然数が $\hat{0}$ に等しいならば true を返し、そうでなければ false を返す関数 is-zero は以下のように定義される。

$$\mathsf{is\text{-}zero} \coloneqq \lambda n.n(\lambda b.\,\mathsf{false})\,\mathsf{true}$$

これと minus を使って、自然数 m, n が $m \leq n$ をみたすかどうかを判定する関数 lteq を以下のように定義する。

$$\mathsf{lteq} \coloneqq \lambda m.\lambda n.\,\mathsf{is\text{-}zero}(\mathsf{minus}\,mn)$$

2 つの自然数が等しいかどうかを判定する関数 eq は以下のように定義できる。

$$\mathsf{eq} \coloneqq \lambda m.\lambda n.\,\mathsf{and}(\mathsf{lteq}\,mn)(\mathsf{lteq}\,nm)$$

原始帰納的函数

自然数の函数のうち、**原始帰納的函数**というクラスに属するものを λ 式によって表現することができる。

> **1.12. 定義（原始帰納的函数）**
>
> 自然数 $\mathbf{N}$ 上の函数のうち、原始帰納的函数とは以下の 3 つの規則によって生成されるクラスである。
>
> 1. 以下のように定義される函数 $\mathrm{zero}, \mathrm{succ} : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, $\mathrm{pr}_i^n : \mathbf{N}^n \longrightarrow \mathbf{N}$ は原始帰納的函数である。
>
> $$\mathrm{zero}(x) = 0$$
> $$\mathrm{succ}(x) = x + 1$$
> $$\mathrm{pr}_i^n(x_1, \cdots, x_n) = x_i \quad (i \in \{1, \cdots, n\})$$
>
> 2. **合成：** $f : \mathbf{N}^m \longrightarrow \mathbf{N}$ と $g_1, \cdots, g_m : \mathbf{N}^n \longrightarrow \mathbf{N}$ が原始帰納的函数のとき、以下のように定義される函数 $h : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ は原始帰納的函数である。
>
> $$h(x_1, \cdots, x_n) = f(g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, g_m(x_1, \cdots, x_n))$$

3. **原始帰納法：** $f : \mathbf{N}^n \longrightarrow \mathbf{N}$ と $g : \mathbf{N}^{n+2} \longrightarrow \mathbf{N}$ が原始帰納的函数のとき、以下のように定義される函数 $h : \mathbf{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{N}$ は原始帰納的函数である。

$$h(0, x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n)$$
$$h(y+1, x_1, \cdots, x_n) = g(y, h(y, x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n)$$

原始帰納的函数は、プログラミング言語における for 文（ある自然数を指定して、その回数だけ演算をくり返すようなループ）を用いて計算できる函数のクラスである。Church 表現の自然数の演算のうち、上で定義したものはどれも原始帰納的函数のクラスに属している。

以下では、Church 表現に基づいて、原始帰納的函数が λ 式によって表現されることを示す。函数 f を表現する λ 式を $\hat{f}$ のように表すことにする。函数 $\mathrm{zero}, \mathrm{succ}, \mathrm{pr}_i^n$ は

$$\widehat{\mathrm{zero}} = \lambda x.\, \hat{0}$$
$$\widehat{\mathrm{succ}} = \lambda x.\, \mathsf{succ}\, x$$
$$\widehat{\mathrm{pr}_i^n} = \lambda x_1.\cdots\lambda x_n.x_i$$

によって表現される。$f : \mathbf{N}^m \to \mathbf{N}$ と $g_1, \cdots, g_m : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ の合成 $h : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ は

$$\hat{h} = \lambda x_1.\cdots\lambda x_n.\, \hat{f}(\hat{g}_1\, x_1 \cdots x_n) \cdots (\widehat{g_m}\, x_1 \cdots x_n)$$

によって表現される。$f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ と $g : \mathbf{N}^{n+2} \to \mathbf{N}$ から原始帰納法によって生成される函数 $h : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ は

$$\hat{h} = \lambda y.\lambda x_1.\cdots\lambda x_n.\mathsf{pr2}\Big(y(\lambda p.\langle \mathsf{succ}(\mathsf{pr1}\, p), \hat{g}(\mathsf{pr1}\, p)(\mathsf{pr2}\, p)x_1 \cdots x_n\rangle)\Big\langle \hat{0}, \hat{f}\, x_1 \cdots x_n \Big\rangle\Big)$$

によって表現される。したがって、すべての原始帰納的函数は λ 式によって表現される。

問題

(1) 原始帰納法が上記の方法で表現されることを証明しなさい。

(2) 自然数の割り算を行う（すなわち、自然数 m, n（$n \geq 1$）を受け取って、$m = qn + r$（$0 \leq r < n$）となるような自然数の組 $\langle q, r \rangle$ を返す）函数 div を定義しなさい。

1.4. 帰納的函数の表現

前節では、原始再帰的函数が λ 式によって表現されることを示した。実は、型なし λ 計算はそれよりも広いクラスの函数を表現する力をもっている。それが**帰納的函数**である。この節では、帰納的函数を λ 式によって表現する方法を示す。

不動点コンビネータ

帰納的函数を表現するために、**不動点コンビネータ**というものを用いる。これは、変数 f に対して、

$$\mathsf{fix}\, f \underset{\beta}{=} f(\mathsf{fix}\, f)$$

が成り立つような λ 式 fix のことである。$\mathsf{fix}\, f$ は函数 f の**不動点**（$f(x) = x$ となるような x）である。不動点コンビネータの具体的な構成は無数に存在するが、もっとも単純なものとして、以下に示す Curry の不動点コンビネータが挙げられる。

$$\mathsf{fix} \coloneqq \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

これが不動点コンビネータの条件をみたしていることは、実際に $\mathsf{fix}\, f$ を β 簡約してみることで確かめられる。

$$\begin{aligned}\mathsf{fix}\, f &= (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))f \\ &\underset{\beta}{=} (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)) \\ &\underset{\beta}{=} f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))) \underset{\beta}{=} f(\mathsf{fix}\, f)\end{aligned}$$

不動点コンビネータによって、再帰的に定義された函数を表現できるようになる。以下のように再帰的に定義される函数 f を考える。

$$f(x_1, \cdots, x_n) = F(f, x_1, \cdots, x_n)$$

この函数 f を表現する λ 式 $\hat{f}$ は

$$\hat{f} = \mathsf{fix}\, \hat{F}$$

によって表される。実際に引数を与えてみると、

$$\begin{aligned}\hat{f}\, x_1 \cdots x_n &= \mathsf{fix}\, \hat{F}\, x_1 \cdots x_n \\ &\underset{\beta}{=} \hat{F}\Big(\mathsf{fix}\, \hat{F}\Big) x_1 \cdots x_n = \hat{F}\, \hat{f}\, x_1 \cdots x_n\end{aligned}$$

となり、確かに再帰的な定義をみたしていることがわかる。

不動点コンビネータ fix は β 正規形をもたない。再帰的に定義された函数の計算は引数によっては決して停止しないことがあるため、そのような函数の表現は弱 β 正規化可能であってはならないのである。

1.13. 定理

任意の不動点コンビネータ fix は弱 β 正規化不可能である。

<u>証明</u>

fix が β 正規形 fix′ をもつとする。f を変数とする。fix′ が λ 抽象でないとき、$\mathsf{fix}'\, f$ は β 正規形である。$\mathsf{fix}' = \lambda x.N_1$ のとき、$\mathsf{fix}'\, f \underset{\beta}{=} N_1[x \coloneqq f]$ となり、$N_1[x \coloneqq f]$ は β 正規形である。したがって、$\mathsf{fix}\, f$ は弱 β 正規化可能である。$\mathsf{fix}\, f$ の β 正規形を N とすると、$N \underset{\beta}{=} \mathsf{fix}\, f \underset{\beta}{=} f(\mathsf{fix}\, f) \underset{\beta}{=} fN$ が成り立ち、fN も β 正規形であるから、定理 1.9 (iii) に矛盾する。したがって、fix は弱 β 正規化不可能である。 ■

帰納的函数

原始帰納的函数においては、函数から新しい函数を作る方法として合成と原始帰納法の 2 つがあったが、帰納的函数ではさらに $\boldsymbol{\mu}$ **作用素**が加えられる。

1.14. 定義（帰納的函数）

自然数 $\mathbf{N}$ 上の函数のうち、帰納的函数とは以下の 4 つの規則によって生成されるクラスである。

1. 以下のように定義される函数 $\mathrm{zero}, \mathrm{succ} : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N},\quad \mathrm{pr}_i^n : \mathbf{N}^n \longrightarrow \mathbf{N}$ は帰納的函数である。
$$\mathrm{zero}(x) = 0$$
$$\mathrm{succ}(x) = x + 1$$
$$\mathrm{pr}_i^n(x_1, \cdots, x_n) = x_i \quad (i \in \{1, \cdots, n\})$$
2. 合成： $f : \mathbf{N}^m \longrightarrow \mathbf{N}$ と $g_1, \cdots, g_m : \mathbf{N}^n \longrightarrow \mathbf{N}$ が帰納的函数のとき、以下のように定義される函数 $h : \mathbf{N}^n \longrightarrow \mathbf{N}$ は帰納的函数である。
$$h(x_1, \cdots, x_n) = f(g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, g_m(x_1, \cdots, x_n))$$
3. 原始帰納法： $f : \mathbf{N}^n \longrightarrow \mathbf{N}$ と $g : \mathbf{N}^{n+2} \longrightarrow \mathbf{N}$ が帰納的函数のとき、以下のように定義される函数 $h : \mathbf{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{N}$ は帰納的函数である。
$$h(0, x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n)$$
$$h(y+1, x_1, \cdots, x_n) = g(y, h(y, x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n)$$
4. $\boldsymbol{\mu}$ **作用素**： $f : \mathbf{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{N}$ が帰納的函数のとき、以下のように定義される函数 $\mu_f : \mathbf{N}^n \longrightarrow \mathbf{N}$ は帰納的函数である。
$$\mu_f(x_1, \cdots, x_n) = y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \begin{cases} f(z, x_1, \cdots, x_n) \geq 1 & (z \in \{0, 1, \cdots, y-1\}) \\ f(y, x_1, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

ただし、条件をみたす自然数 y が存在しないときは、$\mu_f(x_1, \cdots, x_n)$ の値は未定義とする。

帰納的函数は、プログラミング言語における while 文（ある条件をみたすようになるまで演算をくり返すようなループ）を用いて計算できる函数のクラスである。

帰納的函数が λ 式によって表現されることを示すためには、μ 作用素の表現を示せば十分である。函数 $f : \mathbf{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{N}$ に対して、$\mu_f : \mathbf{N}^n \longrightarrow \mathbf{N}$ は以下のように再帰的に定義できる。

$$\mu_f(x_1, \cdots, x_n) = g(0)$$
$$g(y) = \begin{cases} y & (f(y, x_1, \cdots, x_n) = 0 \text{ のとき}) \\ g(y+1) & (f(y, x_1, \cdots, x_n) \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この函数 g は不動点コンビネータを用いて

$$\hat{g} = \mathsf{fix}\Big(\lambda g. \lambda y.\, \mathsf{is\text{-}zero}\Big(\hat{f}\, y x_1 \cdots x_n\Big) y (g(\mathsf{succ}\, y))\Big)$$

と表現されるから、函数 μ_f の表現は

$$\widehat{\mu_f} = \lambda x_1.\cdots\lambda x_n.\,\mathsf{fix}\Big(\lambda g.\lambda y.\,\mathsf{is\text{-}zero}\Big(\hat{f}\,y x_1\cdots x_n\Big)y(g(\mathsf{succ}\,y))\Big)\,\hat{0}$$

のようになる。

したがって、以下の定理が得られる。

1.15. 定理

帰納的函数は λ 式による表現をもつ。

Church–Turing の提唱

型なし λ 計算と同じように帰納的函数を計算できるモデルとして、ほかに以下のようなものが挙げられる。

- Turing 機械： 十分に長いテープと、その上に記号を読み書きできるヘッドがあり、一定のプログラムに従ってヘッドがテープの上を動き回って記号を書きかえていくモデル。
- セル・オートマトン： いくつかの状態を取りうるセルが無限に並んでおり、近傍のセルの状態に依存して状態が更新されていくモデル。
- Марков アルゴリズム： 文字列に対して、一定の書きかえ規則をくり返し適用するモデル。

これらのように帰納的函数を計算できるモデルは **Turing 完全**であるという。有限の長さのアルゴリズムを実行することで計算を行うモデルで、これよりも広いクラスの函数を計算できるものは見つかっていない。したがって、「**計算可能**な函数とは帰納的函数のことである」と定義することができると考えられる。これを **Church–Turing の提唱**とよぶ。

決定不可能な問題

与えられたプログラムが有限のステップで停止するかどうかを判定する問題を**停止性問題**とよぶ。任意に与えられたプログラムに対して停止性問題を解くようなプログラムは存在しないこと、すなわち停止性問題は**決定不可能**であることが証明される。

この命題を λ 計算の言葉で定式化しよう。λ 計算の世界では、プログラムとは λ 式のことである。プログラムに関する問題をプログラムによって扱うために、λ 式を λ 式によって表現するエンコードが必要である（たとえば、λ 式を自然数の列に変換し、さらに Church 表現することなどが考えられる）。λ 式 M の λ 式によるエンコードを $\ulcorner M \urcorner$ と表すことにし、λ 式 M, N のエンコードを受け取って適用 MN のエンコードを返す λ 式 A と、λ 式 M のエンコードを受け取って M のエンコードのエンコードを返す λ 式 E が存在するとする。

$$A\ulcorner M \urcorner \ulcorner N \urcorner \underset{\beta}{=} \ulcorner MN \urcorner$$

$$E\ulcorner M \urcorner \underset{\beta}{=} \ulcorner \ulcorner M \urcorner \urcorner$$

このとき、以下の定理が成り立つ。

1.16. 定理（停止性問題の決定不可能性）

以下の条件が任意の λ 式 M に対して成り立つような λ 式 H は存在しない。

$$H\lceil M\rceil \underset{\beta}{=} \begin{cases} \mathsf{true} & （M \text{ が弱 } \beta \text{ 正規化可能なとき}） \\ \mathsf{false} & （M \text{ が弱 } \beta \text{ 正規化不可能なとき}） \end{cases}$$

<u>証明</u>

条件をみたす H が存在すると仮定し、λ 式 D を

$$D \coloneqq \lambda x.H(Ax(Ex))\,\mathbf{\Omega}\,\mathsf{I}$$

によって定義する（ここで、$\mathbf{\Omega} \coloneqq (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ は弱 β 正規化不可能な λ 式であり、$\mathsf{I} \coloneqq \lambda x.x$ は β 正規形である）。このとき、$D\lceil D\rceil$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} D\lceil D\rceil &\underset{\beta}{=} H(A\lceil D\rceil(E\lceil D\rceil))\,\mathbf{\Omega}\,\mathsf{I} \\ &\underset{\beta}{=} H(A\lceil D\rceil\lceil\lceil D\rceil\rceil)\,\mathbf{\Omega}\,\mathsf{I} \\ &\underset{\beta}{=} H\lceil D\lceil D\rceil\rceil\,\mathbf{\Omega}\,\mathsf{I} \\ &\underset{\beta}{=} \begin{cases} \mathbf{\Omega} & （D\lceil D\rceil \text{ が弱 } \beta \text{ 正規化可能なとき}） \\ \mathsf{I} & （D\lceil D\rceil \text{ が弱 } \beta \text{ 正規化不可能なとき}） \end{cases} \end{aligned}$$

となるが、これは矛盾である。したがって、このような H は存在しない。 ■

このような証明の技法を対角線論法という。驚くべきことに、λ 式の β 同値類に対する非自明な性質はすべて決定不可能であることが、対角線論法によって証明される（上の停止性問題の決定不可能性もこの定理の系になっている）。

1.17. 定理（Rice）

以下の 3 つの条件を同時にみたす λ 式 P は存在しない。

1. 任意の λ 式 M に対して、$P\lceil M\rceil \underset{\beta}{=} \mathsf{true}$ または $P\lceil M\rceil \underset{\beta}{=} \mathsf{false}$
2. 任意の λ 式 M, N に対して、$M \underset{\beta}{=} N$ ならば $P\lceil M\rceil \underset{\beta}{=} P\lceil N\rceil$
3. λ 式 X, Y が存在して、$P\lceil X\rceil \underset{\beta}{=} \mathsf{true},\ \ P\lceil Y\rceil \underset{\beta}{=} \mathsf{false}$

<u>証明</u>

条件をみたす P が存在すると仮定し、λ 式 D を

$$D \coloneqq \lambda x.P(Ax(Ex))YX$$

によって定義する。このとき、$D\lceil D\rceil$ を計算してみると、

$$
\begin{aligned}
D\lceil D\rceil &\underset{\beta}{=} P(A\lceil D\rceil(E\lceil D\rceil))YX \\
&\underset{\beta}{=} P(A\lceil D\rceil\lceil\lceil D\rceil\rceil)YX \\
&\underset{\beta}{=} P\lceil D\lceil D\rceil\rceil YX \\
&\underset{\beta}{=} \begin{cases} Y & (P\lceil D\lceil D\rceil\rceil = \mathsf{true}\ \text{のとき}) \\ X & (P\lceil D\lceil D\rceil\rceil = \mathsf{false}\ \text{のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

となるが、これは矛盾である。したがって、このような P は存在しない。 ■

問題

(1) 以下のように定義される Ackermann 函数 $\mathrm{Ack} : \mathbf{N}^2 \longrightarrow \mathbf{N}$ は、原始帰納的函数でない帰納的函数の例として知られている。

$$
\mathrm{Ack}(m,n) = \begin{cases} n+1 & (m = 0\ \text{のとき}) \\ \mathrm{Ack}(m-1,1) & (m \geq 1,\ n = 0\ \text{のとき}) \\ \mathrm{Ack}(m-1,\mathrm{Ack}(m,n-1)) & (m \geq 1,\ n \geq 1\ \text{のとき}) \end{cases}
$$

Ack を λ 式によって表現しなさい。さらに、その表現を用いて $\mathrm{Ack}(1,1) = 3$ が計算されることを確認しなさい。

(2) 2 つの λ 式の β 同値性を判定する問題は決定不可能であることを証明しなさい。

2. 型付き λ 計算

以下では、λ 計算に**型**の概念を取り入れていく。各 λ 式にはただ 1 つの型が割り当てられる。λ 式 M が型 σ をもつとき、$M : \sigma$ と表し、M は型 σ の**項**であるという。型付き λ 式の適用は、型が合致する組み合わせであるときに限り、行うことができる。

2.1. 単純型付き λ 計算

この節では、もっとも基本的な型付き λ 計算である**単純型付き λ 計算**（$\lambda\!\to$）を定義する。

型

$\lambda\!\to$ では、型から新しい型を作る型構築子として $\to$ だけを認める。型 $\sigma \to \tau$ は、型 σ の項を型 τ の項にうつす函数がもつ型である。

> **2.1. 定義（型（λ→））**
>
> 集合 $\mathcal{T} \neq \emptyset$ をとり、その要素を**基底型**とよぶ。$\lambda\!\to$ の型は以下の 2 つの規則によって生成される。
>
> 1. 基底型 α は型である。
> 2. σ_1 と σ_2 が型のとき、$(\sigma_1 \to \sigma_2)$ も型である。

λ 式のときと同様に、曖昧さが生じない範囲で括弧を省略する。このとき、型構築子 $\to$ による結合は左から順に行うものとする。たとえば、$\alpha \to \beta \to \alpha$ という型は、括弧を省略せずに表すと $(\alpha \to (\beta \to \alpha))$ となる。

λ 式

型付き λ 計算では、λ 抽象の際に変数の型を明示する。

> **2.2. 定義（λ 式（λ→））**
>
> $\lambda\!\to$ において、λ 式は以下の 3 つの規則によって生成される。
>
> 1. 変数 x は λ 式である。
> 2. λ 抽象： x が変数、σ_1 が型、M_1 が λ 式のとき、$(\lambda x^{\sigma_1}.M_1)$ は λ 式である。
> 3. 適用： M_1 と M_2 が λ 式のとき、$(M_1 M_2)$ は λ 式である。

型なし λ 計算のときと同様に代入と α 変換を定義し、α 同値な λ 式を同一視する。

β 簡約

β 簡約も型なし λ 計算のときと同様に定義する。

2.3. 定義（β 簡約（$\boldsymbol{\lambda}\!\to$））

λ 式の 2 項関係 $\underset{\beta}{\to}$ を、以下の 2 つの条件をみたす最小の 2 項関係として定義する。

1. $(\lambda x^\sigma.M)N \underset{\beta}{\to} M[x := N]$
2. $M \underset{\beta}{\to} M'$ のとき、$\lambda x^\sigma.M \underset{\beta}{\to} \lambda x^\sigma.M'$, $MN \underset{\beta}{\to} M'N$, $NM \underset{\beta}{\to} NM'$

さらに、2 項関係 $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ を、$\underset{\beta}{\to}$ を含み、反射律と推移律をみたす最小の 2 項関係として定義し、2 項関係 $\underset{\beta}{=}$ を、$\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ を含む最小の同値関係として定義する。

型判定

λ 式に型を付けるために、**型判定**という式を用いる。型判定は、**文脈** Γ, λ 式 M, 型 σ に対して、$\Gamma \vdash M : \sigma$ という形をした式である。

2.4. 定義（型判定（$\boldsymbol{\lambda}\!\to$））

相異なる n（≥ 0）個の変数 $x_1, \cdots, x_n$ と、n 個の型 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ からなる列

$$x_1 : \sigma_1, \cdots, x_n : \sigma_n$$

を文脈とよぶ。

文脈 Γ, λ 式 M, 型 σ に対して、$\Gamma \vdash M : \sigma$ を型判定とよぶ。

型判定 $\Gamma \vdash M : \sigma$ は、「Γ という文脈において、M という λ 式には σ という型が付く」ということを意味している。以下では、文脈 $\Gamma = x_1 : \sigma_1, \cdots, x_n : \sigma_n$ に対して、変数の集合 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ を $\mathrm{dom}(\Gamma)$ と表す。

λ 式への型付けは、型判定をいくつかの**推論規則**に従って変形していくことによって行われる。推論規則は以下のような形をしている。

$$\frac{\mathcal{P}_1 \quad \cdots \quad \mathcal{P}_n}{\mathcal{C}}$$

ここで、$\mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_n$ は型判定であり、**前提**とよばれる。また、$\mathcal{C}$ も型判定であり、**結論**とよばれる。推論規則は、前提 $\mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_n$ が成り立つときは、必然的に結論 $\mathcal{C}$ も成り立つという規則を表すものである。

$\lambda\!\to$ では、型判定を導出する推論規則として以下の 3 つが認められる。

2.5. 定義（$\boldsymbol{\lambda}\!\to$ の推論規則）

$\lambda\!\to$ において、型判定は以下の 3 つの推論規則に従って導出される。

1. 変数：

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma, \Delta \vdash x : \sigma}$$

2. λ 抽象：

$$\frac{\Gamma, x:\sigma \vdash M:\tau}{\Gamma \vdash \lambda x^{\sigma}.M : \sigma \to \tau}$$

3. 適用：

$$\frac{\Gamma \vdash M:\tau \to \sigma \quad \Gamma \vdash N:\tau}{\Gamma \vdash MN:\sigma}$$

たとえば、$\lambda x^{\alpha}.\lambda y^{\alpha \to \beta}.yx$ という λ 式への型付けは以下のように行われる。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{x:\alpha, y:\alpha \to \beta \vdash y:\alpha \to \beta} \quad \cfrac{}{x:\alpha, y:\alpha \to \beta \vdash x:\alpha}}{x:\alpha, y:\alpha \to \beta \vdash yx:\beta}}{x:\alpha \vdash \lambda y^{\alpha \to \beta}.yx : (\alpha \to \beta) \to \beta}}{\vdash \lambda x^{\alpha}.\lambda y^{\alpha \to \beta}.yx : \alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta}$$

各ステップは3つの推論規則のうちのどれかに対応している。このように推論規則を有限の個数だけ連ねたものを**導出**とよび、導出の最下段にある型判定をその導出の**結論**とよぶ。型判定 $\Gamma \vdash M:\sigma$ を結論にもつ導出が存在するとき、単に $\Gamma \vdash M:\sigma$ であるといい、このとき λ 式 M は**型付け可能**であるという。さらに、$\vdash M:\sigma$ のとき、単に $M:\sigma$ と表す。

型なし λ 計算におけるすべての λ 式が、型付き λ 計算において型付け可能になるわけではない。たとえば、$\lambda x.xx$ は、x にどのような型を割り当てたとしても型付け不可能である。

$\lambda{\to}$ の推論規則に対して、以下の性質が成り立つ。

2.6. 定理

以下の命題が成り立つ。

(i) $\Gamma, x:\tau, y:\rho, \Delta \vdash M:\sigma$ ならば、$\Gamma, y:\rho, x:\tau, \Delta \vdash M:\sigma$ である。

(ii) $\Gamma \vdash M:\sigma$ ならば、変数 $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ に対して、$\Gamma, x:\tau \vdash M:\sigma$ である。

問題

(1) 定理 2.6 を証明しなさい（ヒント： M の構造に関する帰納法を用いる）。

2.2. 単純型付き λ 計算の性質

$\lambda{\to}$ は、以下に挙げるいくつかの性質をみたしている。

2.7. 定理（型付けの一意性）

$\Gamma \vdash M:\sigma$ かつ $\Gamma \vdash M:\sigma'$ ならば、$\sigma = \sigma'$ である。

<u>証明</u>

M の構造に関する帰納法で証明する。

1. $M = x$（変数）のとき：
   文脈の定義により、Γ に含まれる x は 1 つだけだから、σ は一意に定まる。
2. $M = \lambda x^{\sigma_1}.M_1$ で、M_1 に関して定理が成り立つとき：
   ある型 σ_2 に対して、$\sigma = \sigma_1 \to \sigma_2$ かつ $\Gamma, x : \sigma_1 \vdash M_1 : \sigma_2$ である。M_1 に関して定理が成り立つことから、σ_2 は一意に定まる。したがって、σ は一意に定まる。
3. $M = M_1 M_2$ で、M_1 と M_2 に関して定理が成り立つとき：
   ある型 σ_1 に対して、$\Gamma \vdash M_1 : \sigma_1 \to \sigma$ かつ $\Gamma \vdash M_2 : \sigma_1$ である。M_1 に関して定理が成り立つことから、$\sigma_1 \to \sigma$ は一意に定まる。したがって、σ は一意に定まる。 ■

2.8. 定理（主部簡約）

$\Gamma \vdash M : \sigma$ かつ $M \underset{\beta}{\to} N$ ならば、$\Gamma \vdash N : \sigma$ である。

<u>証明</u>

まず、「$\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ かつ $\Gamma \vdash N : \sigma$ ならば、$\Gamma \vdash M[x \coloneqq N] : \tau$ である」という補題を、M の構造に関する帰納法で証明する。

1. $M = y$（変数）のとき：
   $y = x$ のとき、$\tau = \sigma$ かつ $M[x \coloneqq N] = N$ により成り立つ。
   $y \neq x$ のとき、$M[x \coloneqq N] = y$ により成り立つ。
2. $M = \lambda y^{\tau_1}.M_1$ で、M_1 に関して補題が成り立つとき：
   ある型 τ_2 に対して、$\tau = \tau_1 \to \tau_2$ かつ $\Gamma, x : \sigma, y : \tau_1 \vdash M_1 : \tau_2$ である。これと定理 2.6 により、$\Gamma, y : \tau_1, x : \sigma \vdash M_1 : \tau_2$ が成り立つ。また、$\Gamma \vdash N : \sigma$ と定理 2.6 により、$\Gamma, y : \tau_1 \vdash N : \sigma$ が成り立つ。M_1 に関して補題が成り立つことから、$\Gamma, y : \tau_1 \vdash M_1[x \coloneqq N] : \tau_2$ である。したがって、$\Gamma \vdash M[x \coloneqq N] : \tau$ である。
3. $M = M_1 M_2$ で、M_1 と M_2 に関して補題が成り立つとき：
   ある型 τ_1 に対して、$\Gamma, x : \sigma \vdash M_1 : \tau_1 \to \tau$ かつ $\Gamma, x : \sigma \vdash M_2 : \tau_1$ である。M_1 と M_2 に関して補題が成り立つことから、$\Gamma \vdash M_1[x \coloneqq N] : \tau_1 \to \tau$ かつ $\Gamma \vdash M_2[x \coloneqq N] : \tau_1$ である。したがって、$\Gamma \vdash M[x \coloneqq N] : \tau$ である。

以上により、補題が証明された。次に定理の証明を行う。$M \underset{\beta}{\to} N$ のときに定理が成り立つことを証明すれば十分である。M の構造に関する帰納法で証明する。

1. $M = x$（変数）のとき：
   $M \underset{\beta}{\to} N$ となる N は存在しない。
2. $M = \lambda x^{\sigma_1}.M_1$ で、M_1 に関して定理が成り立つとき：
   ある型 σ_2 に対して、$\sigma = \sigma_1 \to \sigma_2$ かつ $\Gamma, x : \sigma_1 \vdash M_1 : \sigma_2$ である。$M \underset{\beta}{\to} N$ が成り立つのは、$M_1 \underset{\beta}{\to} N_1$ かつ $N = \lambda x^{\sigma_1}.N_1$ のときである。M_1 に関して定理が成り立つことから、$\Gamma, x : \sigma_1 \vdash N_1 : \sigma_2$ である。したがって、$\Gamma \vdash N : \sigma$ である。

3. $M = M_1 M_2$ で、M_1 と M_2 に関して定理が成り立つとき：
   ある型 σ_1 に対して、$\Gamma \vdash M_1 : \sigma_1 \to \sigma$ かつ $\Gamma \vdash M_2 : \sigma_1$ である。$M \underset{\beta}{\to} N$ が成り立つのは、
   (a) $M_1 \underset{\beta}{\to} N_1$ かつ $N = N_1 M_2$ のとき
   (b) $M_2 \underset{\beta}{\to} N_2$ かつ $N = M_1 N_2$ のとき
   (c) $M_1 = \lambda x^{\sigma_1}.M_3$ かつ $N = M_3[x := M_2]$ のとき

   のどれかである。

   (a) の場合は、M_1 に関して定理が成り立つことから、$\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1 \to \sigma$ である。したがって、$\Gamma \vdash N : \sigma$ である。

   (b) の場合は、M_2 に関して定理が成り立つことから、$\Gamma \vdash N_2 : \sigma_1$ である。したがって、$\Gamma \vdash N : \sigma$ である。

   (c) の場合は、導出をさらにさかのぼると、

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \sigma_1 \vdash M_3 : \sigma}}{\Gamma \vdash \lambda x^{\sigma_1}.M_3 : \sigma_1 \to \sigma} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M_2 : \sigma_1}}{\Gamma \vdash (\lambda x^{\sigma_1}.M_3)M_2 : \sigma}$$

   となるから、$\Gamma, x : \sigma_1 \vdash M_3 : \sigma$ かつ $\Gamma \vdash M_2 : \sigma_1$ である。したがって、上で証明した補題により、$\Gamma \vdash N : \sigma$ である。 ■

2.9. 定理（Church–Rosser）

$M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N_1$ かつ $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N_2$ ならば、λ 式 L が存在して、$N_1 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ かつ $N_2 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ をみたす。

証明

定理 1.8 の証明（付録 A.1）を参照されたい。 ■

以上の 3 つの定理から、以下の定理が証明される。

2.10. 定理（β 同値類への型付けの一意性）

$\Gamma \vdash M : \sigma$ かつ $\Gamma \vdash N : \sigma'$ かつ $M \underset{\beta}{=} N$ ならば、$\sigma = \sigma'$ である。

次の強正規化性は、型なし λ 計算にはなかった著しい性質である。

2.11. 定理（強正規化）

型付け可能な λ 式は強 β 正規化可能である。

証明

付録 A.3 で証明する。 ■

強正規化性から、2つの型付け可能な λ 式の β 同値性を有限の手順で判定するためには、両者の β 正規形を求め、それらが等しいかどうかを判定すればよいことがわかる。これは、型なし λ 計算において β 同値性が決定不可能であったことと対照的である。

問題

(1) 定理 2.10 を証明しなさい。

(2) すべての不動点コンビネータ（1.4 節）は型付け不可能であることを証明しなさい。

2.3. システム F

この節からは、$\lambda\!\rightarrow$ をさらに複雑な体系へと拡張していく。最初の例として、**システム F**（$\lambda 2$）の概略を述べる。

型に依存する項

$\lambda\!\rightarrow$ では、λ 抽象によって、「項を受け取って項を返す項」を作ることができた。$\lambda 2$ では、通常の λ 抽象に加えて、型を引数に取る λ 抽象を導入する。これによって、「型を受け取って項を返す項」を作ることができる。

$\lambda 2$ では、$\lambda\!\rightarrow$ の推論規則に加えて、以下の 2 つの推論規則を用いる。

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda\alpha^*.M : \Pi\alpha^*.\sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \Pi\alpha^*.\tau}{\Gamma \vdash M\sigma : \tau[\alpha := \sigma]}$$

ここで用いられている $*$ は「型の型」のようなものである。型の λ 抽象に対しても、通常の λ 抽象と同様に β 同値関係 $(\lambda\alpha^*.M)\sigma \underset{\beta}{=} M[\alpha := \sigma]$ を定める。$M : \sigma$ のとき、項 $\lambda\alpha^*.M$ がもつ型は $\Pi\alpha^*.\sigma$ と表される。

型の λ 抽象を導入することによって、任意の型の項を受け取って値を返す函数を表現できるようになる。たとえば、任意の型の項を引数に取り、つねに引数と同じ値を返す恒等函数 $\mathsf{id} : \Pi\alpha^*.\alpha \rightarrow \alpha$ は

$$\mathsf{id} := \lambda\alpha^*.\lambda x^\alpha.x$$

と定義できる。$\mathsf{id}\,\sigma$ は型 σ 上の恒等函数である。

$\lambda 2$ で定義できる型

自然数の型 Nat は、Church 表現（1.3 節）に基づいて以下のように定義できる。

$$\mathsf{Nat} := \Pi\alpha^*.(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$$

項 $\mathsf{zero} : \mathsf{Nat}$，$\mathsf{succ} : \mathsf{Nat} \rightarrow \mathsf{Nat}$ は以下のようにあらためて定義される。

$$\mathsf{zero} := \lambda\alpha^*.\lambda s^{\alpha\to\alpha}.\lambda z^\alpha.z : \mathsf{Nat}$$
$$\mathsf{succ} := \lambda n^{\mathsf{Nat}}.\lambda\alpha^*.\lambda s^{\alpha\to\alpha}.\lambda z^\alpha.s(n\alpha sz) : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}$$

また、型 σ, τ の項を要素にもつ順序対の型 $\sigma \times \tau$ と、項 $\mathsf{pair}_{\sigma,\tau} : \sigma \to \tau \to \sigma \times \tau$ は以下のようにあらためて定義される。

$$\sigma \times \tau := \Pi\alpha^*.(\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha$$
$$\mathsf{pair}_{\sigma,\tau} := \lambda a^\sigma.\lambda b^\tau.\lambda\alpha^*.\lambda f^{\sigma\to\tau\to\alpha}.fab : \sigma \to \tau \to \sigma \times \tau$$

項をもたない型も定義できる。以下の $\mathbf{0}$ 型が代表例である。

$$\mathbf{0} := \Pi\alpha^*.\alpha$$

問題

(1) 真理値の型 Bool と、項 $\mathsf{true}, \mathsf{false} : \mathsf{Bool}$ を定義しなさい。また、型 σ の項を要素にもつリストの型 List_σ と、項 $\mathsf{nil}_\sigma : \mathsf{List}_\sigma$, $\mathsf{cons}_\sigma : \sigma \to \mathsf{List}_\sigma \to \mathsf{List}_\sigma$ を定義しなさい。

(2) 1.3 節で示した原始帰納的函数の表現を、型 $\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \cdots \to \mathsf{Nat}$ の項として、あらためて定義しなさい。

2.4. 構成計算

この節では、システム F（λ2）よりもさらに高い表現力をもつ**構成計算**（λC）という体系を定義する。λ2 では、λ 抽象によって、項や型に依存する項を作ることができた。これをさらに型にも拡張して、項や型に依存する型（型構築子）を考えることができる。これらをすべて含んだ体系が λC である。

依存型

いくつかの項を受け取って型を返すような型構築子を考える。たとえば、自然数 $n : \mathsf{Nat}$ を受け取って、長さ n の自然数の配列の型 $\mathsf{Nat\text{-}array}\, n$ を返す Nat-array などが典型的である。さらに、自然数を受け取って配列を返す以下のような函数 f も考えられる。

$$f(n) = (0, 1, \cdots, n-1) : \mathsf{Nat\text{-}array}\, n$$

f は引数の値によって異なる型の項を返す函数であり、その型は → による通常の函数型では表されない。そこで、λ2 で用いたのと同じ Π という記号を用いて、$f : \Pi n^{\mathsf{Nat}}.\, \mathsf{Nat\text{-}array}\, n$ と表す。このような **Π 型**は、→ による通常の函数型の一般化である。すなわち、型 $\Pi x^A.B$ のうち、B が $x : A$ に依存していないものを $A \to B$ と略記していたのである。また、型 $\Pi x^A.B$ は、$a : A$ で添字付けられた型 $B[x := a]$ たちの直積ともみなせる（$\Pi x^A.B$ から $B[x := a]$ への射影は函数適用 $f \mapsto fa$ で与えられる）。そのため、積を表す Π という記号を用いるのである。

型を受け取って型を返す型構築子も同様に考えられる。たとえば、前節で順序対の型

$$\sigma \times \tau \coloneqq \Pi\alpha^{*}.(\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha$$

を示した。そこで、型構築子 Prod を、

$$\begin{aligned}\mathsf{Prod} &\coloneqq \lambda\alpha^{*}.\lambda\beta^{*}.\alpha \times \beta \\ &= \lambda\alpha^{*}.\lambda\beta^{*}.\Pi\gamma^{*}.(\alpha \to \beta \to \gamma) \to \gamma\end{aligned}$$

によって定義すると、$\mathsf{Prod}\,\sigma\tau \underset{\beta}{=} \sigma \times \tau$ となる。Prod は型を 2 つ受け取って型を返すから、$\mathsf{Prod} : * \to * \to *$ と表される。$*$ や $* \to * \to *$ のような、型や型構築子の集まりは**カインド**とよばれ、(項) : (型) : (カインド) という階層関係がある。

λC の推論規則

λC では、構文や推論規則において、項と型を統一的に扱う。以下では、型判定の右辺は (項) : (型) でも (型) : (カインド) でもよく、文脈もこれらが混在した列であるとする。また、文脈 Γ において K がカインドであるということを、特別な記号 $\Box$（超カインドとよばれる）を用いて $\Gamma \vdash K : \Box$ と表す。

λC の推論規則は以下の 7 つである。

1. 公理：

$$\frac{}{\vdash * : \Box}$$

2. 変数： $s \in \{*, \Box\}$, $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$$

3. 弱化： $s \in \{*, \Box\}$, $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash C : s}{\Gamma, x : C \vdash A : B}$$

4. Π 型： $s_1, s_2 \in \{*, \Box\}$ に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash \Pi x^{A}.B : s_2}$$

5. λ 抽象： $s \in \{*, \Box\}$ に対して、

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : C \qquad \Gamma \vdash \Pi x^{A}.C : s}{\Gamma \vdash \lambda x^{A}.B : \Pi x^{A}.C}$$

6. 適用：

$$\frac{\Gamma \vdash A : \Pi x^{D}.C \qquad \Gamma \vdash B : D}{\Gamma \vdash AB : C[x \coloneqq B]}$$

7. β 変換： $B' \underset{\beta}{=} B$ のとき、$s \in \{*, \Box\}$ に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A : B' \qquad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash A : B}$$

たとえば、恒等函数を表す$\vdash \lambda\alpha^*.\lambda x^\alpha.x : \Pi\alpha^*.\alpha \to \alpha$ という型判定は以下のように導出される（$\alpha \to \alpha$ は $\Pi x^\alpha.\alpha$ の略記であることに注意されたい）。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash * : \square}}{\alpha : * \vdash \alpha : *}}{\alpha : *, x : \alpha \vdash x : \alpha} \quad \dfrac{\vdots}{\alpha : * \vdash \alpha \to \alpha : *}}{\alpha : * \vdash \lambda x^\alpha.x : \alpha \to \alpha} \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash * : \square} \quad \dfrac{\vdots}{\alpha : * \vdash \alpha \to \alpha : *}}{\vdash \Pi\alpha^*.\alpha \to \alpha : *}}{\vdash \lambda\alpha^*.\lambda x^\alpha.x : \Pi\alpha^*.\alpha \to \alpha}$$

ただし、省略されている $\alpha : * \vdash \alpha \to \alpha : *$ の導出は以下のとおりである。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash * : \square}}{\alpha : * \vdash \alpha : *} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash * : \square}}{\alpha : * \vdash \alpha : *} \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash * : \square}}{\alpha : * \vdash \alpha : *}}{\alpha : *, x : \alpha \vdash \alpha : *}}{\alpha : * \vdash \alpha \to \alpha : *}$$

λC で定義できる型

λC で定義できる重要な型に、以下の **Σ 型**がある。

$$\Sigma x^A.B \coloneqq \Pi\alpha^*.\big(\Pi x^A.B \to \alpha\big) \to \alpha$$

順序対の型 $A \times B \coloneqq \Pi\alpha^*.(A \to B \to \alpha) \to \alpha$ と比べると、Σ 型は B が $x : A$ に依存する場合を含めた一般化になっている。すなわち、型 $\Sigma x^A.B$ の項は、型 A の項 a と、それに対する型 $B[x \coloneqq a]$ の項を組にしたものである。また、型 A の項 x に依存する型 B たちの直積が $\Pi x^A.B$ であったのに対して、$\Sigma x^A.B$ はそれらの直和である。$B[x \coloneqq a]$ から $\Sigma x^A.B$ への入射は、$b \mapsto \langle a, b\rangle \coloneqq \lambda\alpha^*.\lambda p^{\Pi x^A.B\to\alpha}.pab$ で与えられる。

λC は万能であるとはいえない。たとえば、自然数の帰納法から類推すれば、任意の $P : \mathsf{Nat} \to *$ に対して、型

$$P\,\hat{0} \to \big(\Pi n^{\mathsf{Nat}}.Pn \to P(\mathsf{succ}\,n)\big) \to \Pi n^{\mathsf{Nat}}.Pn$$

が項をもちそうであるが [5]、そのような項は λC では構成できない（これにより、上述の Nat-array のような型構築子も定義できない）。λC に、このような帰納法を備えた型を定義するための構文と推論規則を追加した**帰納的構成計算**という体系が考えられており、証明支援システム Coq ではこれが用いられている。

2.5. 純粋型システムと λ キューブ

この節では、これまでに扱った λ→, λ2, λC を含むさまざまな型付き λ 計算の体系を包括する概念である**純粋型システム**を定義する。

[5] 型付き λ 計算と論理の対応については 3 章を参照されたい。

純粋型システムは、3 つの集合 $\mathcal{S} \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}^2$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}^3$ の組 $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ によって指定される。$\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ の要素を、それぞれ**ソート**、公理、規則とよぶ。ソートは体系における定数記号である。公理はソート間の階層関係を表し、規則はどのような種類の λ 抽象が認められるかを表す。たとえば、あとで示すように、λC は $\mathcal{S} = \{*, \square\}$, $\mathcal{A} = \{(*, \square)\}$, $\mathcal{R} = \{(*, *, *), (*, \square, \square), (\square, *, *), (\square, \square, \square)\}$ によって指定される純粋型システムである。

純粋型システムの構文と計算規則、推論規則は以下のように定義される。

2.12. 定義（λ 式（純粋型システム））

純粋型システム $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ において、λ 式は以下の 5 つの規則によって生成される。

1. ソート $s \in \mathcal{S}$ は λ 式である。
2. 変数 x は λ 式である。
3. Π 型： x が変数、A_1 と A_2 が λ 式のとき、$\left(\Pi x^{A_1}.A_2\right)$ は λ 式である。
4. λ 抽象： x が変数、A_1 と A_2 が λ 式のとき、$\left(\lambda x^{A_1}.A_2\right)$ は λ 式である。
5. 適用： A_1 と A_2 が λ 式のとき、$(A_1 A_2)$ は λ 式である。

型なし λ 計算のときと同様に代入と α 変換を定義し [6]、α 同値な λ 式を同一視する。

2.13. 定義（β 簡約（純粋型システム））

λ 式の 2 項関係 $\underset{\beta}{\to}$ を、以下の 2 つの条件をみたす最小の 2 項関係として定義する。

1. $\left(\lambda x^A.B\right)C \underset{\beta}{\to} B[x := C]$
2. $A \underset{\beta}{\to} A'$ のとき、$\Pi x^A.B \underset{\beta}{\to} \Pi x^{A'}.B$, $\Pi x^B.A \underset{\beta}{\to} \Pi x^B.A'$, $\lambda x^A.B \underset{\beta}{\to} \lambda x^{A'}.B$, $\lambda x^B.A \underset{\beta}{\to} \lambda x^B.A'$, $AB \underset{\beta}{\to} A'B$, $BA \underset{\beta}{\to} BA'$

さらに、2 項関係 $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ を、$\underset{\beta}{\to}$ を含み、反射律と推移律をみたす最小の 2 項関係として定義し、2 項関係 $\underset{\beta}{=}$ を、$\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ を含む最小の同値関係として定義する。

2.14. 定義（型判定（純粋型システム））

n（≥ 0）個の変数 $x_1, \cdots, x_n$ と、n 個の λ 式 $A_1, \cdots, A_n$ からなる列

$$x_1 : A_1, \cdots, x_n : A_n$$

を文脈とよぶ。

文脈 Γ と λ 式 A, B に対して、$\Gamma \vdash A : B$ を型判定とよぶ。

2.15. 定義（純粋型システムの推論規則）

純粋型システム $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ において、型判定は以下の 7 つの推論規則に従って導出される。

1. 公理： $(s_1, s_2) \in \mathcal{A}$ に対して、

[6] 正確な定義については下の補足を参照されたい。

$$\frac{}{\vdash s_1 : s_2}$$

2. 変数： $s \in \mathcal{S},\ \ x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$$

3. 弱化： $s \in \mathcal{S},\ \ x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash C : s}{\Gamma, x : C \vdash A : B}$$

4. Π 型： $(s_1, s_2, s_3) \in \mathcal{R}$ に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \quad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash \Pi x^A . B : s_3}$$

5. λ 抽象： $s \in \mathcal{S}$ に対して、

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : C \quad \Gamma \vdash \Pi x^A . C : s}{\Gamma \vdash \lambda x^A . B : \Pi x^A . C}$$

6. 適用：

$$\frac{\Gamma \vdash A : \Pi x^D . C \quad \Gamma \vdash B : D}{\Gamma \vdash AB : C[x := B]}$$

7. β 変換： $B' \underset{\beta}{=} B$ のとき、$s \in \mathcal{S}$ に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A : B' \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash A : B}$$

以上により、純粋型システムが定義された。

補足： 純粋型システムにおける代入と α 変換の定義

純粋型システムにおける自由変数、代入、α 変換の定義は以下のとおりである。

2.16. 定義（自由変数（純粋型システム））

λ 式 A に現れる自由変数の集合 $\mathrm{FV}(A)$ を、A の構造に関して帰納的に定義する。

1. $A = s$（ソート）のとき、$\mathrm{FV}(A) = \emptyset$
2. $A = x$（変数）のとき、$\mathrm{FV}(A) = \{x\}$
3. $A = \Pi x^{A_1} . A_2$ のとき、$\mathrm{FV}(A) = \mathrm{FV}(A_1) \cup (\mathrm{FV}(A_2) \setminus \{x\})$
4. $A = \lambda x^{A_1} . A_2$ のとき、$\mathrm{FV}(A) = \mathrm{FV}(A_1) \cup (\mathrm{FV}(A_2) \setminus \{x\})$
5. $A = A_1 A_2$ のとき、$\mathrm{FV}(A) = \mathrm{FV}(A_1) \cup \mathrm{FV}(A_2)$

2.17. 定義（代入（純粋型システム））

λ 式 A, B と変数 x に対して、代入 $A[x := B]$ を、A の構造に関して帰納的に定義する。

1. $A = s$（ソート）のとき、$A[x := B] = s$

2. $A = y$（変数）のとき、$A[x := B] = \begin{cases} B & (y = x \text{ のとき}) \\ y & (y \neq x \text{ のとき}) \end{cases}$
3. $A = \Pi y^{A_1}.A_2$ のとき、$A[x := B] = \Pi y'^{A_1[x:=B]}.A_2[y := y'][x := B]$（ただし、$y' \notin \{x\} \cup \mathrm{FV}(A_1) \cup \mathrm{FV}(A_2) \cup \mathrm{FV}(B)$）
4. $A = \lambda y^{A_1}.A_2$ のとき、$A[x := B] = \lambda y'^{A_1[x:=B]}.A_2[y := y'][x := B]$（ただし、$y' \notin \{x\} \cup \mathrm{FV}(A_1) \cup \mathrm{FV}(A_2) \cup \mathrm{FV}(B)$）
5. $A = A_1A_2$ のとき、$A[x := B] = A_1[x := B]A_2[x := B]$

2.18. 定義（α 変換（純粋型システム））

λ 式の 2 項関係 $\underset{\alpha}{=}$ を、以下の 3 つの条件をみたす最小の同値関係として定義する。

1. $\Pi x^A.B \underset{\alpha}{=} \Pi y^A.B[x := y]$（$y \notin \mathrm{FV}(B)$ のとき）
2. $\lambda x^A.B \underset{\alpha}{=} \lambda y^A.B[x := y]$（$y \notin \mathrm{FV}(B)$ のとき）
3. $A \underset{\alpha}{=} A'$ のとき、$\Pi x^A.B \underset{\alpha}{=} \Pi x^{A'}.B$, $\Pi x^B.A \underset{\alpha}{=} \Pi x^B.A'$, $\lambda x^A.B \underset{\alpha}{=} \lambda x^{A'}.B$, $\lambda x^B.A \underset{\alpha}{=} \lambda x^B.A'$, $AB \underset{\alpha}{=} A'B$, $BA \underset{\alpha}{=} BA'$

純粋型システムの性質

すべての純粋型システムに対して、型付けの一意性、主部簡約定理、Church–Rosser の定理が成り立つ。すなわち、β 同値類への型付けの一意性が成り立つ（2.2 節）。

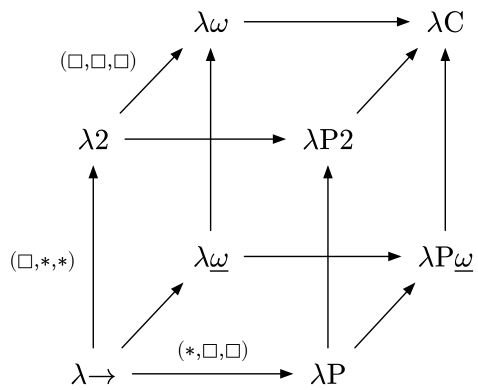
λ キューブ

純粋型システム $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ のうち、$\mathcal{S} = \{*, \square\}$, $\mathcal{A} = \{(*, \square)\}$ であるようなものを考える。$\mathcal{R}$ の要素の候補としては、$s_2 = s_3$ とすれば $(*, *, *)$, $(*, \square, \square)$, $(\square, *, *)$, $(\square, \square, \square)$ の 4 つが考えられる。このうち $(*, *, *)$ は必ず $\mathcal{R}$ に含まれるものとして、ほかの 3 つを含むかどうかによって以下の 8 つの体系が得られる。

表 2.1　λ キューブの 8 つの体系

体系	$(*, *, *)$	$(*, \square, \square)$	$(\square, *, *)$	$(\square, \square, \square)$
λ→	○	×	×	×
$\lambda\underline{\omega}$	○	×	×	○
λ2	○	×	○	×
λω	○	×	○	○
λP	○	○	×	×
$\lambda\mathrm{P}\underline{\omega}$	○	○	×	○
λP2	○	○	○	×
λC	○	○	○	○

これらの体系は立方体の頂点の上に並べられ、**λ キューブ**とよばれる。



これまでに扱った $\lambda{\to}$, $\lambda 2$, $\lambda\mathrm{C}$ もここに含まれている。規則 $(*,*,*)$, $(*,\square,\square)$, $(\square,*,*)$, $(\square,\square,\square)$ は、それぞれ項に依存する項、項に依存する型、型に依存する項、型に依存する型が認められることを表している。

λ キューブの体系たちは、一般の純粋型システムの性質に加えて、強正規化性（2.2 節）をみたす。

問題

(1) $\mathcal{S} = \{*, \square\}$, $\mathcal{A} = \{(*, \square)\}$, $\mathcal{R} = \{(*, *, *)\}$ で与えられる純粋型システムが $\lambda{\to}$ と等価であることを確認しなさい。

3. 直観主義論理と λ 計算

型付き λ 計算における型と項は、直観主義論理における命題とその証明に対応している。これを **Curry–Howard 対応**とよぶ。

3.1. 証明体系

論理とは、与えられた前提から結論を導くための手続きである。前提や結論は**論理式**という形で与えられる。前提から結論を導く**証明**は、公理と推論規則に基づいて形式的に構成される。

論理体系のうち、**命題論理**では、「かつ」、「または」、「ならば」など、**命題**の間の関係だけを扱う。一方で、**述語論理**では、さらに命題の内容も扱う。内容をもつ命題とは、たとえば「$1 + 1 = 2$」のようなものであり、**個体**（ここでは 1 や 2 のこと）と、個体から個体を作る**函数**（ここでは $+$ のこと）、個体に関する命題を作る**述語**（ここでは $=$ のこと）を含んでいる。

古典論理と直観主義論理

論理にはさまざまな体系があるが、その中でも**古典論理**と**直観主義論理**とよばれる 2 種類の体系が有名である。両体系の公理と推論規則の違いはわずかに見えるが、根本にある考え方は大きく異なる。

古典論理では、命題とは真または偽という値をもつ文であると解釈される（2 値原理とよばれる）。「かつ」、「または」、「ならば」などの結合子は真理値を 2 つ受け取って真理値を返す 2 項演算のようなものであり、論理式全体が返す値を評価することによって命題の真偽が定まる。

一方で、直観主義論理では、このように命題に真理値を割り当てるのではなく、命題の証明をより単純な命題の証明から組み立てていくことで証明を行う。たとえば、「A かつ B」という命題に対しては、A の証明と B の証明を用意し、それらを組にすることで、その証明を構成することができる。

古典論理ではつねに真の命題でも、直観主義論理では証明が構成できないものがある。そのような例として、任意の命題 A に対する「A または「A でない」」という命題が挙げられる。この命題は排中律とよばれ、論理式では $A \vee \neg A$ と表される（$\vee$ は「または」を表し、$\neg A$ は「A でない」を表す）。古典論理では、A の真偽を定めることで全体の真偽が定まる。A が真のとき、$A \vee \neg A = (\text{真}) \vee (\text{偽}) = (\text{真})$ となり、A が偽のとき、$A \vee \neg A = (\text{偽}) \vee (\text{真}) = (\text{真})$ となるから、排中律はつねに真である。一方で、直観主義論理では、$A \vee \neg A$ を証明するためには A の証明か $\neg A$ の証明のどちらかを用意する必要があるが、A に関する仮定がない限りはそのどちらも不可能である。このように、直観主義論理は古典論理よりも弱い論理である。

1 階命題論理

以下では、**自然演繹**という枠組みを用いて、直観主義論理の証明体系を定式化する。自然演繹では、論理式の列 Γ と論理式 A に対して、$\Gamma \vdash A$ を**判定**とよぶ。$\Gamma \vdash A$ は、「Γ に含まれるすべての命題を仮定したとき、命題 A が証明できる」ということを意味している。判定を推論規則に従って変形していくことで証明を構成する。

1 階命題論理のもっとも単純な体系（**含意断片**）では、論理式の結合子として、「ならば」を表す $\to$ だけを用いる。推論規則は以下のとおりである。

- 仮定：

$$\frac{}{\Gamma, A, \Delta \vdash A}$$

- $\to$ の導入：

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

- $\to$ の除去（**前件肯定**）：

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

これに加えて、さらに「かつ」を表す $\wedge$,「または」を表す $\vee$, 矛盾を表す $\perp$ を導入した 1 階命題論理の体系がよく用いられる。命題 A の否定 $\neg A$ は、$A \to \perp$ の略記として定義される。

- $\wedge$ の導入：

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

- $\wedge$ の除去：

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

- $\vee$ の導入：

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

- $\vee$ の除去：

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

- $\perp$ の除去（**爆発律**）：

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A}$$

爆発律は矛盾 $\perp$ を特徴付けるための規則である。すなわち、矛盾とは、すべての命題の証明を含んでいるような命題のことであると解釈される。

補足： 古典命題論理

上の体系のうち、$\bot$ の除去則（爆発律）を以下のものに置きかえると、古典論理の証明体系になる（$\neg A$ は $A \to \bot$ の略記であることに注意されたい）。

- **2 重否定の除去**：

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

直観主義論理の体系でこれを導出することはできない。一方で、2 重否定の除去を用いると爆発律を以下のように導出することができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \bot, \neg A \vdash \bot}}{\Gamma, \bot \vdash \neg\neg A}}{\Gamma \vdash \bot \to \neg\neg A} \quad \Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\neg A}}{\Gamma \vdash A}$$

また、上述の排中律 $A \vee \neg A$ は以下のように証明される。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)} \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash A}}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A}}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash \bot}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \bot}}{\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)}}{\vdash A \vee \neg A}$$

どちらの証明においても、2 重否定の除去は最下段で 1 回だけ用いられており、結論の 2 重否定までは直観主義論理の推論規則に基づいて証明されている。一般に、古典論理で証明される命題の 2 重否定は、直観主義論理でも証明される。

2 階命題論理

2 階命題論理では、さらに命題の**量化**を導入する。量化には全称量化子 $\forall$ と存在量化子 $\exists$ を用いる。命題を表す変数 α と、論理式 A に対して、$\forall\alpha.A$ は「すべての命題 α に対して命題 A が成り立つ」という命題を表し、$\exists\alpha.A$ は「命題 A が成り立つような命題 α が存在する」という命題を表す。これらの量化子の導入則と除去則は以下のとおりである。

- $\forall$ の導入： Γ の中に現れない命題変数 α に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall\alpha.A}$$

- $\forall$ の除去：

$$\dfrac{\Gamma \vdash \forall\alpha.A}{\Gamma \vdash A[\alpha \coloneqq B]}$$

- $\exists$ の導入：

$$\dfrac{\Gamma \vdash A[\alpha \coloneqq B]}{\Gamma \vdash \exists\alpha.A}$$

- $\exists$ の除去：Γ の中に現れない命題変数 α に対して、

$$\dfrac{\Gamma \vdash \exists\alpha.A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

実は、$\to, \land, \lor, \bot, \forall, \exists$ を含む 2 階命題論理は、$\to, \forall$ だけを含む 2 階命題論理と等価である。後者では、残りの $\land, \lor, \bot, \exists$ は以下のような略記とみなされる。

$$\begin{aligned}
A \land B &\coloneqq \forall\alpha.(A \to B \to \alpha) \to \alpha \\
A \lor B &\coloneqq \forall\alpha.(A \to \alpha) \to (B \to \alpha) \to \alpha \\
\bot &\coloneqq \forall\alpha.\alpha \\
\exists\alpha.A &\coloneqq \forall\beta.(\forall\alpha.A \to \beta) \to \beta
\end{aligned}$$

2 つの体系が等価であることを示すためには、$\land, \lor, \bot, \exists$ をこのような略記とみなしたときに、もとの導入則と除去則が再現できることを示せばよい。ここでは $\exists$ についてだけ示す。導入則は以下のように導出される。$\Delta \coloneqq A[\alpha \coloneqq B], \forall\alpha.A \to \beta$ とする。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \Delta \vdash \forall\alpha.A \to \beta}}{\Gamma, \Delta \vdash A[\alpha \coloneqq B] \to \beta} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \Delta \vdash A[\alpha \coloneqq B]}}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}}{\Gamma, A[\alpha \coloneqq B] \vdash (\forall\alpha.A \to \beta) \to \beta}}{\Gamma, A[\alpha \coloneqq B] \vdash \exists\alpha.A}}{\Gamma \vdash A[\alpha \coloneqq B] \to \exists\alpha.A} \qquad \Gamma \vdash A[\alpha \coloneqq B]}{\Gamma \vdash \exists\alpha.A}$$

除去則は以下のように導出される。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \exists\alpha.A}{\Gamma \vdash (\forall\alpha.A \to B) \to B} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}}{\Gamma \vdash \forall\alpha.A \to B}}{\Gamma \vdash B}$$

述語論理

1 階述語論理では、いくつかの個体変数に依存する述語を扱うことができる。また、命題の量化は認められないが、個体を量化することができる。個体の量化にかかわる推論規則は以下のとおりである。

- $\forall$ の導入：Γ の中に自由変数として現れない個体変数 x に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x.A}$$

- $\forall$ の除去：

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A[x := t]}$$

- $\exists$ の導入：

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x.A}$$

- $\exists$ の除去：Γ の中に自由変数として現れない個体変数 x に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x.A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

さらに、2 つの個体が等しいという命題を作るための述語記号 $=$ を導入する。

- $=$ の導入（反射律）：

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}$$

- $=$ の除去（代入）：

$$\frac{\Gamma \vdash t = u \quad \Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash A[x := u]}$$

現代数学の基礎として標準となっている Zermelo–Fraenkel 集合論の公理系は、述語記号として $=$ と $\in$ をもつ古典 1 階述語論理の言葉で書かれている。

2 階述語論理では、さらに命題や述語の量化が認められる（推論規則は 2 階命題論理のときと同様である）。**高階述語論理**では、述語は個体変数だけでなく命題や述語にも依存することができる。

問題

(1) 以下の命題を証明しなさい。

(i) $(B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$

(ii) $(A \to B \to C) \to B \to A \to C$

(iii) $A \to B \to A$

(iv) $(A \to A \to B) \to A \to B$

(2) 以下の命題を証明しなさい。

(i) $t = t$（反射律）

(ii) $t = u \to u = t$（対称律）

(iii) $t = u \to u = v \to t = v$（推移律）

3.2. Curry–Howard 対応

直観主義論理では、命題の証明は具体的に構成されたものであった。そこで、証明がもつ型を考え、命題 A の証明の型を $\mathrm{prf}(A)$ と表すことにする。項 $a : \mathrm{prf}(A)$ が構成できれば、命題 A が証明できるということである。

このとき、命題 $A \to B$ の証明の型 $\mathrm{prf}(A \to B)$ は、$\mathrm{prf}(A)$ や $\mathrm{prf}(B)$ とどのような関係にあるだろうか？ $A \to B$ を証明するためには、命題 A の証明から命題 B の証明を作るための規則を示せばよい。これは A の証明を B の証明にうつす函数とみなせるから、$\mathrm{prf}(A \to B) \cong \mathrm{prf}(A) \to \mathrm{prf}(B)$ であるといえる [7)]。

この考えに基づいて、1 階命題論理（含意断片）の推論規則を、証明を表す項を明記して書き直すと、以下のようになる。

- 仮定：

$$\frac{}{\Gamma, x : \mathrm{prf}(A), \Delta \vdash x : \mathrm{prf}(A)}$$

- $\to$ の導入：

$$\frac{\Gamma, x : \mathrm{prf}(A) \vdash b : \mathrm{prf}(B)}{\Gamma \vdash \lambda x.b : \mathrm{prf}(A \to B)}$$

- $\to$ の除去（前件肯定）：

$$\frac{\Gamma \vdash c : \mathrm{prf}(A \to B) \quad \Gamma \vdash a : \mathrm{prf}(A)}{\Gamma \vdash ca : \mathrm{prf}(B)}$$

これらの推論規則は、$\lambda\!\to$（単純型付き λ 計算）の推論規則と同じ形をしている。命題 A と型 $\mathrm{prf}(A)$ を区別せずに A と書けば、命題論理と $\lambda\!\to$ の間には以下のような対応がある。

表 3.1　命題論理と $\lambda\!\to$ の対応

命題論理	$\lambda\!\to$
命題 A の証明	型 A の項
$A \to B$	$A \to B$

命題論理における判定の導出が与えられれば、上のように項を明記した形に書き直すことで、λ 式の型判定が得られる。逆に、型判定が与えられれば、その導出が復元できる。すなわち、命題を証明することは、対応する型の項を構成することと等価である。たとえば、$A \to B \to A$ という命題は、項 $\lambda x^A.\lambda y^B.x : A \to B \to A$ を与えることによって証明できたことになる。

$\lambda\!\to$ 以外の λ キューブの体系たちも、それぞれ以下のように論理体系と対応している。

7) $\cong$ は両辺が同型である（自然に同一視できる）ことを表す。

表 3.2　λ キューブの体系と対応する論理体系

体系	$(*,*,*)$	$(*,\square,\square)$	$(\square,*,*)$	$(\square,\square,\square)$	論理体系
$\lambda\!\to$	○	×	×	×	1 階命題論理
$\lambda\underline{\omega}$	○	×	×	○	弱高階命題論理
$\lambda 2$	○	×	○	×	2 階命題論理
$\lambda\omega$	○	×	○	○	高階命題論理
$\lambda\mathrm{P}$	○	○	×	×	1 階述語論理
$\lambda\mathrm{P}\underline{\omega}$	○	○	×	○	弱高階述語論理
$\lambda\mathrm{P}2$	○	○	○	×	2 階述語論理
$\lambda\mathrm{C}$	○	○	○	○	高階述語論理

たとえば、λC（構成計算）と（型付きの）高階述語論理の対応は以下のように与えられる。

表 3.3　高階述語論理と λC の対応

高階述語論理	λC
命題 A の証明	型 $A:*$ の項
個体 t^σ	項 $t:\sigma$（$\sigma:*$）
述語 P	型構築子 $P:K$（$K:\square$）
$A\to B$	$A\to B$
$A\wedge B$	$A\times B := \Pi\alpha^*.(A\to B\to\alpha)\to\alpha$
$A\vee B$	$A+B := \Pi\alpha^*.(A\to\alpha)\to(B\to\alpha)\to\alpha$
$\bot$	$\mathbf{0} := \Pi\alpha^*.\alpha$
$\forall x^\sigma.A$（個体の量化）	$\Pi x^\sigma.A$
$\exists x^\sigma.A$（個体の量化）	$\Sigma x^\sigma.A := \Pi\alpha^*.(\Pi x^\sigma.A\to\alpha)\to\alpha$
$\forall\alpha.A$（述語の量化）	$\Pi\alpha^K.A$
$\exists\alpha.A$（述語の量化）	$\Sigma\alpha^K.A := \Pi\beta^*.(\Pi\alpha^K.A\to\beta)\to\beta$
$t^\sigma = u^\sigma$	$(t=u)_\sigma := \Pi\alpha^{\sigma\to *}.\alpha t\to\alpha u$

命題 $A\wedge B$ の証明は A の証明と B の証明の組として与えられるから、対応する型は $A\times B$ である。射影 $\mathsf{pr1}: A\times B\to A$, $\mathsf{pr2}: A\times B\to B$ は $\wedge$ の除去則に対応している。また、矛盾 $\bot$ には、項をもたない型 $\mathbf{0}$ が対応している。爆発律に対応するのは項 $\lambda x^{\mathbf{0}}.xA:\mathbf{0}\to A$ である。等式 $t^\sigma = u^\sigma$ にも、対応する型 $(t=u)_\sigma := \Pi\alpha^{\sigma\to *}.\alpha t\to\alpha u$ が存在する。このように、論理式には対応する λ 式が存在し、直観主義論理の推論規則を再現できるのである。

問題

(1) $\lambda\!\to$ における以下の 4 つの項を具体的に構成しなさい。

$$\mathsf{B} : (B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$$
$$\mathsf{C} : (A \to B \to C) \to B \to A \to C$$
$$\mathsf{K} : A \to B \to A$$
$$\mathsf{W} : (A \to A \to B) \to A \to B$$

(2) 高階述語論理における以下の 3 つの項を具体的に構成しなさい。

$$\mathsf{refl} : \Pi\alpha^{*}.\Pi x^{\alpha}.(x = x)_{\alpha}$$
$$\mathsf{inv} : \Pi\alpha^{*}.\Pi x^{\alpha}.\Pi y^{\alpha}.(x = y)_{\alpha} \to (y = x)_{\alpha}$$
$$\mathsf{concat} : \Pi\alpha^{*}.\Pi x^{\alpha}.\Pi y^{\alpha}.\Pi z^{\alpha}.(x = y)_{\alpha} \to (y = z)_{\alpha} \to (x = z)_{\alpha}$$

4. λ 計算の表示的意味論

これまでに見てきたように、λ 式は単なる記号列ではなく、函数や、命題の証明としての意味をもっている。**プログラム意味論**では、このようなプログラムの意味を、形式的かつ具体的に定式化する。

プログラム意味論には大きく分けて 3 種類の考え方がある。**操作的意味論**では、プログラムはある機械への命令であるとされ、プログラムの意味は、それを読んだ機械の状態がどのように遷移するかという規則によって与えられる。**公理的意味論**では、プログラムの同値関係を導出するための公理と推論規則を定めることで、意味が等しいという概念を定式化する。**表示的意味論**では、ある数学的な構造を用意し、プログラムの構文をその中の対象に対応させる。

この節では、$\lambda_{\to}$（単純型付き λ 計算）および型なし λ 計算の表示的意味論を扱う。舞台となる数学的な構造は**カーテシアン閉圏**[8)]である。

4.1. カーテシアン閉圏

圏論は、数学的な対象の集まりを、それらの間の「つながり」に基づいて抽象的に捉えるための枠組みを提供する。対象の間の「つながり」がなす構造は**圏**として抽象化される。カーテシアン閉圏は、圏のうちいくつかの特別な性質をみたすものとして定義される。

圏

圏は以下のように定義される構造である。

> **4.1. 定義（圏）**
>
> 圏 $\mathcal{C}$ は以下の要素からなる。
>
> 1. **対象**の集まり[9)] $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.
> 2. 各 $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ に対して定まる A から B への**射**の集合 $\mathrm{Hom}(A, B)$. $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ を $f : A \longrightarrow B$ や $A \xrightarrow{f} B$ とも表す。
> 3. 各 $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ に対して定まる写像 $\circ : \mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, C)$ で、以下の条件をみたすもの： 任意の $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ に対して、$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ となる。この写像を射の**合成**とよぶ。
> 4. 各 $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ に対して定まる射 $\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$ で、以下の条件をみたすもの： 任意の $A \xrightarrow{f} B$ に対して、$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$ となる。この射を A における**恒等射**とよぶ。

圏の例として、集合と写像の圏 **Set** を定義する。

---

8) 「カーテシアン」は「Descartes の」を意味する。

9) 対象の集まりは集合とはみなせないほど大きい「真のクラス」であってもよい。

4.2. 定義（集合と写像の圏）

集合と写像の圏 $\mathbf{Set}$ を以下のように定義する。

1. $\mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}$ は集合全体の集まりである。
2. 各 $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}$ に対して、$\mathrm{Hom}(A, B)$ は A から B への写像全体の集合である。
3. 各 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ に対して、合成 $g \circ f : A \longrightarrow C$ は合成写像 $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ である。
4. 各 $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}$ に対して、恒等射 $\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$ は恒等写像 $\mathrm{id}_A(a) = a$ である。

圏からいくつかの対象と射を抜き出して、**図式**とよばれる有向グラフによって表すことがよくある。特に、図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

は、$g \circ f = h$ が成り立つとき、**可換**であるといわれる。同様に、可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

は $g \circ f = k \circ h$ を意味する。

圏論において重要な同型という概念を定義する。

4.3. 定義（同型）

射 $f : A \longrightarrow B$ が**同型**であるとは、射 $f^{-1} : B \longrightarrow A$ が存在して、$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ と $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ をみたすことをいう。このとき、f^{-1} は一意であり、f の**逆射**とよばれる。対象 A, B の間に同型 $A \longrightarrow B$ が存在するとき、$A \cong B$ と表し、A と B は**同型**であるという。

$\cong$ は同値関係となる。たとえば、集合と写像の圏 $\mathbf{Set}$ では、同型とは 2 つの集合の間の全単射のことである。

終対象・直積・冪

カーテシアン閉圏とは、以下に定義するように**終対象**、**直積**、**冪**をもつ圏のことである。

4.4. 定義（終対象）

圏 $\mathcal{C}$ が終対象をもつとは、$\mathbf{1} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ が存在して、以下の条件をみたすことをいう：任意の $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ に対して、射 $!_X : X \longrightarrow \mathbf{1}$ が一意的に存在する。

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "!_X"'] \\
\mathbf{1}
\end{tikzcd}
$$

このとき、$\mathbf{1}$ は同型を除いて一意[10]であり、終対象とよばれる。

4.5. 定義（直積）

圏 $\mathcal{C}$ が直積をもつとは、任意の $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ に対して、$A \times B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ と、図式

$$
A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B
$$

が存在して、以下の条件をみたすことをいう： 任意の $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ と、図式

$$
A \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} B
$$

に対して、射 $\langle f, g \rangle : X \longrightarrow A \times B$ で、図式

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f, g \rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}
$$

を可換にするものが一意的に存在する。

このとき、$A \times B$ は同型を除いて一意であり、A と B の直積とよばれる。

4.6. 定義（冪）

圏 $\mathcal{C}$ が冪をもつとは、任意の $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ に対して、$B^A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ と、図式

$$
B^A \times A \xrightarrow{\mathrm{app}} B
$$

が存在して、以下の条件をみたすことをいう： 任意の $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ と、図式

$$
X \times A \xrightarrow{f} B
$$

に対して、射 $\Lambda(f) : X \longrightarrow B^A$ で、図式

$$
\begin{tikzcd}
X \times A \arrow[d, dashed, "\langle \Lambda(f) \circ \pi_1, \pi_2 \rangle"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B^A \times A \arrow[r, "\mathrm{app}"'] & B
\end{tikzcd}
$$

を可換にするものが一意的に存在する。

10) 「同型を除いて一意」とは、条件をみたすどの 2 つの対象も同型であるということである。

このとき、B^A は同型を除いて一意であり、A から B への冪とよばれる。

4.7. 定義（カーテシアン閉圏）

終対象、直積、冪をもつ圏をカーテシアン閉圏とよぶ。

集合と写像の圏 $\mathbf{Set}$ は代表的なカーテシアン閉圏である。

- 終対象 $\mathbf{1}$ は単元集合（ただ 1 つの要素をもつ集合）$\{*\}$ である。$!_X : X \longrightarrow \mathbf{1}$ は $!_X(x) = *$ で与えられる。
- 直積 $A \times B$ は A と B の直積集合であり、$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$ と $\pi_2 : A \times B \longrightarrow B$ は射影 $\pi_1(a,b) = a,\ \pi_2(a,b) = b$ である。$f : X \longrightarrow A$ と $g : X \longrightarrow B$ に対して、$\langle f, g\rangle : X \longrightarrow A \times B$ は $\langle f, g\rangle(x) = (f(x), g(x))$ で与えられる。
- 冪 B^A は A から B への写像全体の集合であり、$\mathrm{app} : B^A \times A \longrightarrow B$ は評価写像 $\mathrm{app}(f, a) = f(a)$ である。$f : X \times A \longrightarrow B$ に対して、$\Lambda(f) : X \longrightarrow B^A$ は $\Lambda(f)(x)(a) = f(x, a)$ で与えられる。

問題

(1) 命題と含意の圏を考える。この圏の対象は命題であり、A と B の間には、$A \vdash B$ が証明できるときに限り、ただ 1 つだけの射があると定める。これが実際に圏の定義をみたしており、さらにカーテシアン閉圏であることを確認しなさい。

4.2. 単純型付き λ 計算の表示的意味論

$\lambda\!\!\to$ において、型 $\sigma \to \tau$ の項は、型 σ の項を型 τ の項にうつす函数を表していた。集合論とのアナロジーでは、型とその項の関係は、集合とその要素の関係に似ている。型 $\sigma \to \tau$ には、集合 σ から集合 τ への写像全体の集合が対応すると考えられる。この発想は、集合と写像の圏 $\mathbf{Set}$ の一般化であるカーテシアン閉圏を用いて正当化される。

λ 式と射の対応

$\lambda\!\!\to$ における型 σ はカーテシアン閉圏 $\mathcal{C}$ の対象 $[\![\sigma]\!]$ に対応し、型 $\sigma \to \tau$ は冪 $[\![\tau]\!]^{[\![\sigma]\!]}$ に対応する。項（閉 λ 式）$M : \sigma$ は $[\![\sigma]\!]$ の「要素」に対応させたいが、圏には対象の要素という概念がない。そこで、射 $[\![M]\!] : \mathbf{1} \longrightarrow [\![\sigma]\!]$ に対応させる（集合と写像の圏 $\mathbf{Set}$ においては、射 $f : \{*\} \longrightarrow A$ は要素 $f(*) \in A$ と 1 対 1 に対応している）。そして、λ 式の「意味」とは、この対応する射のことであると解釈するのである。

自由変数を含む λ 式も扱うことができる。一般には、導出可能な型判定 $\Gamma \vdash M : \sigma$ を、射 $[\![\Gamma \vdash M : \sigma]\!] : \Pi_\Gamma \longrightarrow [\![\sigma]\!]$ に対応させる（ここで、対象 Π_Γ は

$$\Pi_{x_1:\sigma_1,\cdots,x_n:\sigma_n} = (\cdots(\mathbf{1} \times [\![\sigma_1]\!]) \times \cdots) \times [\![\sigma_n]\!]$$

によって定義される)。特に、閉 λ 式 $M:\sigma$ に対しては、$[\![M]\!] \coloneqq [\![\vdash M:\sigma]\!] : \mathbf{1} \longrightarrow [\![\sigma]\!]$ となる。

射 $[\![\Gamma \vdash M:\sigma]\!]$ を得るための規則は以下のように与えられる。

4.8. 定義(型判定とカーテシアン閉圏の射の対応)

導出可能な型判定 $\Gamma \vdash M:\sigma$ に対して、射 $[\![\Gamma \vdash M:\sigma]\!] : \Pi_\Gamma \longrightarrow [\![\sigma]\!]$ を以下の規則によって対応させる [11)]。

1. $[\![\Gamma, x:\sigma \vdash x:\sigma]\!] = \pi_2^{\Pi_\Gamma \times [\![\sigma]\!]} : \Pi_\Gamma \times [\![\sigma]\!] \longrightarrow [\![\sigma]\!]$
2. $\Gamma \vdash M:\sigma$ のとき、$[\![\Gamma, x:\tau \vdash M:\sigma]\!] = [\![\Gamma \vdash M:\sigma]\!] \circ \pi_1^{\Pi_\Gamma \times [\![\tau]\!]} : \Pi_\Gamma \times [\![\tau]\!] \longrightarrow [\![\sigma]\!]$
3. $[\![\Gamma \vdash \lambda x^\sigma.M : \sigma \to \tau]\!] = \Lambda([\![\Gamma, x:\sigma \vdash M:\tau]\!]) : \Pi_\Gamma \longrightarrow [\![\tau]\!]^{[\![\sigma]\!]}$
4. $[\![\Gamma \vdash MN:\tau]\!] = \mathrm{app}_{[\![\tau]\!]^{[\![\sigma]\!]}} \circ \langle [\![\Gamma \vdash M:\sigma \to \tau]\!], [\![\Gamma \vdash N:\sigma]\!] \rangle : \Pi_\Gamma \longrightarrow [\![\tau]\!]$

例として、λ 式 $\lambda x^\alpha.\lambda y^{\alpha\to\beta}.yx : \alpha \to (\alpha\to\beta) \to \beta$ を考える。$[\![\alpha]\!] = A,\ \ [\![\beta]\!] = B$ とすると、$[\![\alpha \to (\alpha\to\beta)\to\beta]\!] = \left(B^{B^A}\right)^A$ である。射 $\left[\!\!\left[\vdash \lambda x^\alpha.\lambda y^{\alpha\to\beta}.yx : \alpha \to (\alpha\to\beta) \to \beta\right]\!\!\right] : \mathbf{1} \longrightarrow \left(B^{B^A}\right)^A$ は

$$
\begin{aligned}
&\left[\!\!\left[\vdash \lambda x^\alpha.\lambda y^{\alpha\to\beta}.yx : \alpha \to (\alpha\to\beta) \to \beta\right]\!\!\right] \\
&= \Lambda\left(\left[\!\!\left[x:\alpha \vdash \lambda y^{\alpha\to\beta}.yx : (\alpha\to\beta)\to\beta\right]\!\!\right]\right) \\
&= \Lambda(\Lambda([\![x:\alpha, y:\alpha\to\beta \vdash yx:\beta]\!])) \\
&= \Lambda(\Lambda(\mathrm{app}_{B^A} \circ \langle [\![x:\alpha, y:\alpha\to\beta \vdash y:\alpha\to\beta]\!], [\![x:\alpha, y:\alpha\to\beta \vdash x:\alpha]\!] \rangle)) \\
&= \Lambda\Big(\Lambda\Big(\mathrm{app}_{B^A} \circ \Big\langle \pi_2^{(\mathbf{1}\times A)\times B^A}, [\![x:\alpha \vdash x:\alpha]\!] \circ \pi_1^{(\mathbf{1}\times A)\times B^A} \Big\rangle\Big)\Big) \\
&= \Lambda\Big(\Lambda\Big(\mathrm{app}_{B^A} \circ \Big\langle \pi_2^{(\mathbf{1}\times A)\times B^A}, \pi_2^{\mathbf{1}\times A} \circ \pi_1^{(\mathbf{1}\times A)\times B^A} \Big\rangle\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

と表される。

計算規則

一方で、射 $\left[\!\!\left[\vdash \lambda x^\alpha.\lambda y^\beta.y : \alpha\to\beta\to\beta\right]\!\!\right] : \mathbf{1} \longrightarrow (B^B)^A$ を考えると、以下のように 2 つの表式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\left[\!\!\left[\vdash \lambda x^\alpha.\lambda y^\beta.y : \alpha\to\beta\to\beta\right]\!\!\right] &= \Lambda\left(\left[\!\!\left[x:\alpha \vdash \lambda y^\beta.y : \beta\to\beta\right]\!\!\right]\right) \\
&= \Lambda(\Lambda([\![x:\alpha, y:\beta \vdash y:\beta]\!])) \\
&= \Lambda\Big(\Lambda\Big(\pi_2^{(\mathbf{1}\times A)\times B}\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

[11)] 直積 $A \times B$ に備わる射 $\pi_1 : A\times B \longrightarrow A,\ \pi_2 : A\times B \longrightarrow B$ をそれぞれ $\pi_1^{A\times B}, \pi_2^{A\times B}$ と表している。また、冪 B^A に備わる射 $\mathrm{app} : B^A \times A \longrightarrow B$ を app_{B^A} と表している。

$$
\begin{aligned}
[\![\vdash \lambda x^{\alpha}.\lambda y^{\beta}.y : \alpha \to \beta \to \beta]\!] &= \Lambda\big([\![x : \alpha \vdash \lambda y^{\beta}.y : \beta \to \beta]\!]\big) \\
&= \Lambda\big([\![\vdash \lambda y^{\beta}.y : \beta \to \beta]\!] \circ \pi_1^{\mathbf{1}\times A}\big) \\
&= \Lambda\big(\Lambda([\![y : \beta \vdash y : \beta]\!]) \circ \pi_1^{\mathbf{1}\times A}\big) \\
&= \Lambda\big(\Lambda\big(\pi_2^{\mathbf{1}\times B}\big) \circ \pi_1^{\mathbf{1}\times A}\big)
\end{aligned}
$$

これらが同じ射を表しているのかどうか調べるために、カーテシアン閉圏における計算規則を整理しよう。終対象、直積、冪の定義から、以下の等式が成り立つ。

(E1) $X \xrightarrow{f} \mathbf{1}$ に対して、$!_X = f$

(E2) $X \xrightarrow{f} A,\ X \xrightarrow{g} B$ に対して、$\pi_1^{A\times B} \circ \langle f, g\rangle = f$

(E3) $X \xrightarrow{f} A,\ X \xrightarrow{g} B$ に対して、$\pi_2^{A\times B} \circ \langle f, g\rangle = g$

(E4) $X \xrightarrow{h} A \times B$ に対して、$\big\langle \pi_1^{A\times B} \circ h, \pi_2^{A\times B} \circ h\big\rangle = h$

(E5) $X \times A \xrightarrow{f} B$ に対して、$\mathrm{app}_{B^A} \circ \big\langle \Lambda(f) \circ \pi_1^{X\times A}, \pi_2^{X\times A}\big\rangle = f$

(E6) $X \xrightarrow{g} B^A$ に対して、$\Lambda\big(\mathrm{app}_{B^A} \circ \big\langle g \circ \pi_1^{X\times A}, \pi_2^{X\times A}\big\rangle\big) = g$

これらを扱いやすいように変形すると、以下の計算規則が得られる。

4.9. 定理

以下の計算規則 (E1a) 〜 (E6b) は、上の (E1) 〜 (E6) と同値である。

(E1a) $Y \xrightarrow{f} X$ に対して、$!_X \circ f = !_Y$

(E1b) $!_{\mathbf{1}} = \mathrm{id}_{\mathbf{1}}$

(E2) $X \xrightarrow{f} A,\ X \xrightarrow{g} B$ に対して、$\pi_1^{A\times B} \circ \langle f, g\rangle = f$

(E3) $X \xrightarrow{f} A,\ X \xrightarrow{g} B$ に対して、$\pi_2^{A\times B} \circ \langle f, g\rangle = g$

(E4a) $X \xrightarrow{f} A,\ X \xrightarrow{g} B,\ Y \xrightarrow{h} X$ に対して、$\langle f, g\rangle \circ h = \langle f \circ h, g \circ h\rangle$

(E4b) $\big\langle \pi_1^{A\times B}, \pi_2^{A\times B}\big\rangle = \mathrm{id}_{A\times B}$

(E5a) $X \times A \xrightarrow{f} B,\ X \xrightarrow{g} A$ に対して、$\mathrm{app}_{B^A} \circ \langle \Lambda(f), g\rangle = f \circ \langle \mathrm{id}_X, g\rangle$

(E6a) $X \times A \xrightarrow{f} B,\ Y \xrightarrow{g} X$ に対して、$\Lambda(f) \circ g = \Lambda\big(f \circ \big\langle g \circ \pi_1^{Y\times A}, \pi_2^{Y\times A}\big\rangle\big)$

(E6b) $\Lambda(\mathrm{app}_{B^A}) = \mathrm{id}_{B^A}$

これらの規則を用いると、上の例は

$$
\begin{aligned}
\Lambda\big(\Lambda\big(\pi_2^{\mathbf{1}\times B}\big) \circ \pi_1^{\mathbf{1}\times A}\big) &= \Lambda\Big(\Lambda\Big(\pi_2^{\mathbf{1}\times B} \circ \Big\langle \pi_1^{\mathbf{1}\times A} \circ \pi_1^{(\mathbf{1}\times A)\times B}, \pi_2^{(\mathbf{1}\times A)\times B}\Big\rangle\Big)\Big) \quad \because \text{(E6a)} \\
&= \Lambda\Big(\Lambda\Big(\pi_2^{(\mathbf{1}\times A)\times B}\Big)\Big) \quad \because \text{(E3)}
\end{aligned}
$$

となり、確かに同じ射であることがわかる。このように、$[\![\ ]\!]$ によって型判定に対応する射は一意である。

β 変換による不変性

λ 式の意味は、β 変換によって変わらないはずである。以下では、λ 式に対応する射が β 同値性に関する不変量であり、λ 式の意味論とよぶにふさわしいものであることを示す。

4.10. 定理

$M \underset{\beta}{=} N$ ならば、$[\![\Gamma \vdash M : \sigma]\!] = [\![\Gamma \vdash N : \sigma]\!]$ である。

<u>証明</u>

n 個の射 $f_i : A \longrightarrow B_i$（$i \in \{1, \cdots, n\}$）に対して、射 $\langle\!\langle f_1, \cdots, f_n \rangle\!\rangle : A \longrightarrow (\cdots(\mathbf{1} \times B_1) \times \cdots) \times B_n$ を

$$\langle\!\langle f_1, \cdots, f_n \rangle\!\rangle = \langle \langle \cdots \langle !_A, f_1 \rangle, \cdots \rangle, f_n \rangle$$

によって定義する。まず、補題

$$\begin{aligned}[\![x_1 : \sigma_1, \cdots, x_n : \sigma_n \vdash M : \tau]\!] \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \rangle\!\rangle \\ = [\![\Gamma \vdash M[x_1 := N_1] \cdots [x_n := N_n] : \tau]\!]\end{aligned}$$

を、M の構造に関する帰納法で証明する。$\Delta_i := x_1 : \sigma_1, \cdots, x_i : \sigma_i$（$i \in \{1, \cdots, n\}$）とする。

1. $M = y$（変数） のとき：
   ある $i \in \{1, \cdots, n\}$ に対して $y = x_i$ かつ $\tau = \sigma_i$ であり、

$$\begin{aligned}
&[\![\Delta_n \vdash M : \tau]\!] \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \rangle\!\rangle \\
&= [\![\Delta_n \vdash x_i : \sigma_i]\!] \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \rangle\!\rangle \\
&= [\![\Delta_{n-1} \vdash x_i : \sigma_i]\!] \circ \pi_1^{\Pi_{\Delta_{n-1}} \times [\![\sigma_n]\!]} \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \rangle\!\rangle \\
&= [\![\Delta_{n-1} \vdash x_i : \sigma_i]\!] \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_{n-1} : \sigma_{n-1}]\!] \rangle\!\rangle \quad \because \text{(E2)} \\
&= \cdots \\
&= [\![\Delta_i \vdash x_i : \sigma_i]\!] \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_i : \sigma_i]\!] \rangle\!\rangle \\
&= \pi_2^{\Pi_{\Delta_{i-1}} \times [\![\sigma_i]\!]} \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_i : \sigma_i]\!] \rangle\!\rangle \\
&= [\![\Gamma \vdash N_i : \sigma_i]\!] \quad \because \text{(E3)} \\
&= [\![\Gamma \vdash M[x_1 := N_1] \cdots [x_n := N_n] : \tau]\!]
\end{aligned}$$

   となるから成り立つ。

2. $M = \lambda y^{\tau_1}.M_1$ で、M_1 に関して定理が成り立つとき：
   ある型 τ_2 に対して $\tau = \tau_1 \to \tau_2$ かつ $\Delta_n, y : \tau_1 \vdash M_1 : \tau_2$ であり、

$$
\begin{aligned}
&[\![\Delta_n \vdash M : \tau]\!] \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \rangle\!\rangle \\
&= [\![\Delta_n \vdash \lambda y^{\tau_1}.M_1 : \tau_1 \to \tau_2]\!] \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \rangle\!\rangle \\
&= \Lambda([\![\Delta_n, y : \tau_1 \vdash M_1 : \tau_2]\!]) \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \rangle\!\rangle \\
&= \Lambda\Big([\![\Delta_n, y : \tau_1 \vdash M_1 : \tau_2]\!] \circ \Big\langle \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \rangle\!\rangle \circ \pi_1^{\Pi_\Gamma \times [\![\tau_1]\!]}, \pi_2^{\Pi_\Gamma \times [\![\tau_1]\!]} \Big\rangle \Big) \\
&\hspace{30em} \because \text{(E6a)} \\
&= \Lambda\Big([\![\Delta_n, y : \tau_1 \vdash M_1 : \tau_2]\!] \circ \\
&\qquad \Big\langle \Big\langle\!\!\Big\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!] \circ \pi_1^{\Pi_\Gamma \times [\![\tau_1]\!]}, \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \circ \pi_1^{\Pi_\Gamma \times [\![\tau_1]\!]} \Big\rangle\!\!\Big\rangle, \pi_2^{\Pi_\Gamma \times [\![\tau_1]\!]} \Big\rangle \Big) \quad \because \text{(E4a)} \\
&= \Lambda([\![\Delta_n, y : \tau_1 \vdash M_1 : \tau_2]\!] \circ \\
&\qquad \langle\!\langle [\![\Gamma, y : \tau_1 \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma, y : \tau_1 \vdash N_n : \sigma_n]\!], [\![\Gamma, y : \tau_1 \vdash y : \tau_1]\!] \rangle\!\rangle) \\
&= \Lambda([\![\Gamma, y : \tau_1 \vdash M_1[x_1 := N_1] \cdots [x_n := N_n][y := y] : \tau_2]\!]) \\
&= \Lambda([\![\Gamma, y : \tau_1 \vdash M_1[x_1 := N_1] \cdots [x_n := N_n] : \tau_2]\!]) \\
&= [\![\Gamma \vdash \lambda y^{\tau_1}.M_1[x_1 := N_1] \cdots [x_n := N_n] : \tau_1 \to \tau_2]\!] \\
&= [\![\Gamma \vdash M[x_1 := N_1] \cdots [x_n := N_n] : \tau]\!]
\end{aligned}
$$

となるから成り立つ。

3. $M = M_1 M_2$ で、M_1 と M_2 に関して定理が成り立つとき：
ある型 τ_1 に対して $\Delta_n \vdash M_1 : \tau_1 \to \tau$ かつ $\Delta_n \vdash M_2 : \tau_1$ であり、

$$
\begin{aligned}
&[\![\Delta_n \vdash M : \tau]\!] \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \rangle\!\rangle \\
&= [\![\Delta_n \vdash M_1 M_2 : \tau]\!] \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \rangle\!\rangle \\
&= \mathrm{app}_{[\![\tau]\!]^{[\![\tau_1]\!]}} \circ \langle [\![\Delta_n \vdash M_1 : \tau_1 \to \tau]\!], [\![\Delta \vdash M_2 : \tau_1]\!] \rangle \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \rangle\!\rangle \\
&= \mathrm{app}_{[\![\tau]\!]^{[\![\tau_1]\!]}} \circ \langle [\![\Delta_n \vdash M_1 : \tau_1 \to \tau]\!] \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \rangle\!\rangle, \\
&\hspace{14em} [\![\Delta_n \vdash M_2 : \tau_1]\!] \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash N_1 : \sigma_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash N_n : \sigma_n]\!] \rangle\!\rangle \rangle \quad \because \text{(E4a)} \\
&= \mathrm{app}_{[\![\tau]\!]^{[\![\tau_1]\!]}} \circ \langle [\![\Delta_n \vdash M_1[x_1 := N_1] \cdots [x_n := N_n] : \tau_1 \to \tau]\!], \\
&\hspace{14em} [\![\Delta_n \vdash M_2[x_1 := N_1] \cdots [x_n := N_n] : \tau_1]\!] \rangle \\
&= [\![\Delta_n \vdash M_1[x_1 := N_1] \cdots [x_n := N_n] M_2[x_1 := N_1] \cdots [x_n := N_n] : \tau]\!] \\
&= [\![\Gamma \vdash M[x_1 := N_1] \cdots [x_n := N_n] : \tau]\!]
\end{aligned}
$$

となるから成り立つ。

以上により、補題が証明された。次に定理の証明を行う。$\Gamma \vdash M : \sigma$ と $\Gamma \vdash N : \tau$ に対して、$[\![\Gamma \vdash (\lambda x^\tau.M)N : \sigma]\!] = [\![\Gamma \vdash M[x := N] : \sigma]\!]$ であることを証明すれば十分である。実際に計算すると、

$$
\begin{aligned}
[\![\Gamma \vdash (\lambda x^\tau.M)N : \sigma]\!] &= \mathrm{app}_{[\![\sigma]\!]^{[\![\tau]\!]}} \circ \langle [\![\Gamma \vdash \lambda x^\tau.M : \tau \to \sigma]\!], [\![\Gamma \vdash N : \tau]\!] \rangle \\
&= \mathrm{app}_{[\![\sigma]\!]^{[\![\tau]\!]}} \circ \langle \Lambda([\![\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma]\!]), [\![\Gamma \vdash N : \tau]\!] \rangle \\
&= [\![\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma]\!] \circ \left\langle \mathrm{id}_{\Pi_\Gamma}, [\![\Gamma \vdash N : \tau]\!] \right\rangle \quad \because \text{(E5a)}
\end{aligned}
$$

となる。$\Gamma = y_1 : \rho_1, \cdots, y_n : \rho_n$ とし、$\Gamma_i = y_1 : \rho_1, \cdots, y_i : \rho_i$ （$i \in \{1, \cdots, n\}$）とすると、

$$
\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{id}_{\Pi_\Gamma}, [\![\Gamma \vdash N : \tau]\!] \right\rangle &= \left\langle \left\langle \pi_1^{\Pi_{\Gamma_{n-1}} \times [\![\rho_n]\!]}, \pi_2^{\Pi_{\Gamma_{n-1}} \times [\![\rho_n]\!]} \right\rangle, [\![\Gamma \vdash N : \tau]\!] \right\rangle \quad \because \text{(E4b)} \\
&= \left\langle \left\langle \mathrm{id}_{\Pi_{\Gamma_{n-1}}} \circ \pi_1^{\Pi_{\Gamma_{n-1}} \times [\![\rho_n]\!]}, [\![\Gamma \vdash y_n : \rho_n]\!] \right\rangle, [\![\Gamma \vdash N : \tau]\!] \right\rangle \\
&= \cdots \\
&= \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash y_1 : \rho_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash y_n : \rho_n]\!], [\![\Gamma \vdash N : \tau]\!] \rangle\!\rangle
\end{aligned}
$$

が成り立つから、上で証明した補題により、

$$
\begin{aligned}
[\![\Gamma \vdash (\lambda x^\tau.M)N : \sigma]\!] &= [\![\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma]\!] \circ \langle\!\langle [\![\Gamma \vdash y_1 : \rho_1]\!], \cdots, [\![\Gamma \vdash y_n : \rho_n]\!], [\![\Gamma \vdash N : \tau]\!] \rangle\!\rangle \\
&= [\![M[y_1 \coloneqq y_1] \cdots [y_n \coloneqq y_n][x \coloneqq N]]\!]_\Gamma \\
&= [\![M[x \coloneqq N]]\!]_\Gamma
\end{aligned}
$$

となる。 ■

問題

(1) 定理 4.9 を証明しなさい。

4.3. 型なし λ 計算の表示的意味論

前節で与えた λ→ の表示的意味論を、型なし λ 計算に拡張する。

反射的対象

型なし λ 計算は型の概念をもたないが、すべての λ 式が同じ「型」υ をもっているということもできる。いわば、型なし λ 計算では以下のような推論規則が認められる。

1. 変数：

$$\frac{}{\Gamma, x : \upsilon, \Delta \vdash x : \upsilon}$$

2. λ 抽象：

$$\frac{\Gamma, x : \upsilon \vdash M : \upsilon}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \upsilon}$$

3. 適用：

$$\frac{\Gamma \vdash M : \upsilon \quad \Gamma \vdash N : \upsilon}{\Gamma \vdash MN : \upsilon}$$

λ 抽象と適用の推論規則は、型付き λ 計算のものとは本質的に異なっている。したがって、型なし λ 式をカーテシアン閉圏の射と対応させるためには工夫が必要である。

4.11. 定義（反射的対象）

圏 $\mathcal{C}$ が**反射的対象**をもつとは、$U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ と、射 $\mathrm{in} : U^U \longrightarrow U$, $\mathrm{out} : U \longrightarrow U^U$ が存在して、$\mathrm{out} \circ \mathrm{in} = \mathrm{id}_{U^U}$ をみたすことをいう。

反射的対象の定義は、U の内部に U^U を埋め込むことができることを表している。この U が、型なし λ 計算におけるただ 1 つの「型」を表す役割を担う。

λ 式と射の対応

型なし λ 式の表示的意味論を定義する前に、いくつかの記法を準備する。まず、相異なる変数からなる列 $\Gamma = x_1, \cdots, x_n$ と λ 式 M に対して、$\mathrm{FL}(M) \subseteq \{\Gamma\}$ が成り立つとき、$\Gamma \vdash M$ と表し、これを判定とよぶことにする。また、Γ の長さ n を $|\Gamma|$ と表す。さらに、対象 U^n を

$$U^0 = \mathbf{1}$$
$$U^{n+1} = U^n \times U$$

によって定義する。このとき、型なし λ 式と射の対応は以下のように定式化される。

4.12. 定義（判定とカーテシアン閉圏の射の対応）

$(U, \mathrm{in}, \mathrm{out})$ を反射的対象とする。判定 $\Gamma \vdash M$ に対して、射 $[\![\Gamma \vdash M]\!] : U^{|\Gamma|} \longrightarrow U$ を以下の規則によって対応させる。

1. $[\![\Gamma, x \vdash x]\!] = \pi_2^{U^{|\Gamma|} \times U} : U^{|\Gamma, x|} \longrightarrow U$
2. $\Gamma \vdash M$ のとき、$[\![\Gamma, x \vdash M]\!] = [\![\Gamma \vdash M]\!] \circ \pi_1^{U^{|\Gamma|} \times U} : U^{|\Gamma, x|} \longrightarrow U$
3. $[\![\Gamma \vdash \lambda x.M]\!] = \mathrm{in} \circ \Lambda([\![\Gamma, x \vdash M]\!]) : U^{|\Gamma|} \longrightarrow U$
4. $[\![MN]\!]_\Gamma = \mathrm{app}_{U^U} \circ \langle \mathrm{out} \circ [\![\Gamma \vdash M]\!], [\![\Gamma \vdash N]\!] \rangle : U^{|\Gamma|} \longrightarrow U$

たとえば、射 $[\![\vdash (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)]\!] : \mathbf{1} \longrightarrow U$ は

$$
\begin{aligned}
& [\![\vdash (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)]\!] \\
&= \mathrm{app}_{U^U} \circ \langle \mathrm{out} \circ [\![\vdash \lambda x.xx]\!], [\![\vdash \lambda x.xx]\!] \rangle \\
&= \mathrm{app}_{U^U} \circ \langle \mathrm{out} \circ \mathrm{in} \circ \Lambda([\![x \vdash xx]\!]), \mathrm{in} \circ \Lambda([\![x \vdash xx]\!]) \rangle \\
&= \mathrm{app}_{U^U} \circ \langle \Lambda([\![x \vdash xx]\!]), \mathrm{in} \circ \Lambda([\![x \vdash xx]\!]) \rangle \\
&= \mathrm{app}_{U^U} \circ \langle \Lambda(\mathrm{app}_{U^U} \circ \langle \mathrm{out} \circ [\![x \vdash x]\!], [\![x \vdash x]\!] \rangle), \mathrm{in} \circ \Lambda(\mathrm{app}_{U^U} \circ \langle \mathrm{out} \circ [\![x \vdash x]\!], [\![x \vdash x]\!] \rangle) \rangle \\
&= \mathrm{app}_{U^U} \circ \big\langle \Lambda\big(\mathrm{app}_{U^U} \circ \big\langle \mathrm{out} \circ \pi_2^{\mathbf{1} \times U}, \pi_2^{\mathbf{1} \times U} \big\rangle\big), \mathrm{in} \circ \Lambda\big(\mathrm{app}_{U^U} \circ \big\langle \mathrm{out} \circ \pi_2^{\mathbf{1} \times U}, \pi_2^{\mathbf{1} \times U} \big\rangle\big)\big\rangle
\end{aligned}
$$

と表される。射 $\mathrm{out} : U \longrightarrow U^U$, $\mathrm{in} : U^U \longrightarrow U$ によって、λ 式をそれ自身に適用することが可能になっていることがわかる。

前節の計算規則 (E1a) 〜 (E6b) に $\mathrm{out} \circ \mathrm{in} = \mathrm{id}_{U^U}$ を加えた 10 個の規則によって、$\lambda\!\to$ の表示的意味論のときと同様に計算を行うことができる。また、λ 式に対応する射が β 変換によって不変であることも証明される。

具体的なモデル

反射的対象をもつカーテシアン閉圏が型なし λ 計算のモデルになることがわかった。具体例の 1 つは、集合と写像の圏 **Set** である。この圏がカーテシアン閉圏であることは 4.1 節で述べたとおりである。集合 $U \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}$ が反射的対象であるための必要十分条件は、集合 U^U から U への単射が存在することであるが、これは U が単元集合であることと同値である。したがって、圏 **Set** は反射的対象をもち、型なし λ 計算のモデルとしての条件をみたしている。しかし、U が単元集合であることにより、$\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, U)$ や $\mathrm{Hom}(U^n, U)$ はすべて単元集合となるため、このモデルはすべての λ 式を恒等射に対応させる自明なものになってしまう。

非自明なモデルの例は、完備半順序集合と連続函数の圏 **CPO** において構成される。圏 **CPO** の定義と、反射的対象の具体的な構成は付録 B で行う。

付録 A. 省略した証明

A.1. Church–Rosser の定理

1.2 節で述べた Church–Rosser の定理（定理 1.8）を証明する。

A.1. 定義（並行簡約）

λ 式の 2 項関係 $\underset{\mathrm{p}}{\to}$ を、以下の 4 つの条件をみたす最小の 2 項関係として定義する。

1. $x \underset{\mathrm{p}}{\to} x$
2. $M \underset{\mathrm{p}}{\to} M'$ かつ $N \underset{\mathrm{p}}{\to} N'$ のとき、$(\lambda x.M)N \underset{\mathrm{p}}{\to} M'[x := N']$
3. $M \underset{\mathrm{p}}{\to} M'$ のとき、$\lambda x.M \underset{\mathrm{p}}{\to} \lambda x.M'$
4. $M \underset{\mathrm{p}}{\to} M'$ かつ $N \underset{\mathrm{p}}{\to} N'$ のとき、$MN \underset{\mathrm{p}}{\to} M'N'$

A.2. 定理

$M \underset{\mathrm{p}}{\to} M'$ かつ $N \underset{\mathrm{p}}{\to} N'$ ならば、$M[x := N] \underset{\mathrm{p}}{\to} M'[x := N']$ が成り立つ。

<u>証明</u>

M の構造に関する帰納法で証明する。

1. $M = y$（変数）のとき：

   $M \underset{\mathrm{p}}{\to} M'$ が成り立つのは、$M' = y$ のときである。

   $y = x$ のとき、

   $$M[x := N] = N \underset{\mathrm{p}}{\to} N' = M'[x := N']$$

   が成り立つ。

   $y \neq x$ のとき、

   $$M[x := N] = y \underset{\mathrm{p}}{\to} y = M'[x := N']$$

   が成り立つ。

2. $M = \lambda y.M_1$ で、M_1 に関して定理が成り立つとき：

   $M \underset{\mathrm{p}}{\to} M'$ が成り立つのは、$M_1 \underset{\mathrm{p}}{\to} M_1'$ かつ $M' = \lambda y.M_1'$ のときである。M_1 に関して定理が成り立つことから、

   $$M[x := N] = \lambda y.M_1[x := N] \underset{\mathrm{p}}{\to} \lambda y.M_1'[x := N'] = M'[x := N']$$

   が成り立つ。

3. $M = M_1 M_2$ で、M_1 と M_2 に関して定理が成り立つとき：

   $M \underset{\mathrm{p}}{\to} M'$ が成り立つのは、

   (a) $M_1 \underset{\mathrm{p}}{\to} M_1'$ かつ $M_2 \underset{\mathrm{p}}{\to} M_2'$ かつ $M' = M_1' M_2'$ のとき

   (b) $M_1 = \lambda y.M_3$ かつ $M_3 \underset{\mathrm{p}}{\to} M_3'$ かつ $M_2 \underset{\mathrm{p}}{\to} M_2'$ かつ $M' = M_3'[y := M_2']$ のとき

のどちらかである。

(a) の場合は、M_1 と M_2 に関して定理が成り立つことから、

$$M[x := N] = M_1[x := N]M_2[x := N] \underset{\mathrm{p}}{\to} M_1'[x := N']M_2'[x := N'] = M'[x := N']$$

が成り立つ。

(b) の場合は、M_1 と M_2 に関して定理が成り立つことから、

$$\begin{aligned} M[x := N] &= (\lambda y.M_3[x := N])M_2[x := N] \\ &\underset{\mathrm{p}}{\to} M_3'[x := N'][y := M_2'[x := N']] = M'[x := N'] \end{aligned}$$

が成り立つ。 ■

A.3. 定理

$M \underset{\mathrm{p}}{\to} N_1$ かつ $M \underset{\mathrm{p}}{\to} N_2$ ならば、λ 式 L が存在して、$N_1 \underset{\mathrm{p}}{\to} L$ かつ $N_2 \underset{\mathrm{p}}{\to} L$ をみたす。

<u>証明</u>

各 λ 式 M に対して、M の中の β 基をすべて書きかえた λ 式 M^* を、M の構造に関して帰納的に定義する。

1. $M = x$（変数）のとき、$M^* = x$
2. $M = \lambda x.M_1$ のとき、$M^* = \lambda x.M_1^*$
3. $M = M_1M_2$ のとき、$M^* = \begin{cases} M_3^*[x := M_2^*] & \text{（}M_1 = \lambda x.M_3 \text{ のとき）} \\ M_1^*M_2^* & \text{（それ以外のとき）} \end{cases}$

定理を証明するためには、$M \underset{\mathrm{p}}{\to} N$ ならば $N \underset{\mathrm{p}}{\to} M^*$ であることを証明すれば十分である。M の構造に関する帰納法で証明する。

1. $M = x$（変数）のとき：
   $M \underset{\mathrm{p}}{\to} N$ が成り立つのは、$N = x$ のときである。このとき、$N = x \underset{\mathrm{p}}{\to} x = M^*$ が成り立つ。
2. $M = \lambda x.M_1$ で、M_1 に関して定理が成り立つとき：
   $M \underset{\mathrm{p}}{\to} N$ が成り立つのは、$M_1 \underset{\mathrm{p}}{\to} M_1'$ かつ $N = \lambda x.M_1'$ のときである。M_1 に関して定理が成り立つことから、$N = \lambda x.M_1' \underset{\mathrm{p}}{\to} \lambda x.M_1^* = M^*$ が成り立つ。
3. $M = M_1M_2$ で、M_1 と M_2 に関して定理が成り立つとき：
   $M \underset{\mathrm{p}}{\to} N$ が成り立つのは、
   (a) $M_1 \underset{\mathrm{p}}{\to} M_1'$ かつ $M_2 \underset{\mathrm{p}}{\to} M_2'$ かつ $N = M_1'M_2'$ のとき
   (b) $M_1 = \lambda x.M_3$ かつ $M_3 \underset{\mathrm{p}}{\to} M_3'$ かつ $M_2 \underset{\mathrm{p}}{\to} M_2'$ かつ $N = M_3'[x := M_2']$ のとき
   のどちらかである。
   (a) の場合は、M_1 と M_2 に関して定理が成り立つことから、$N = M_1'M_2' \underset{\mathrm{p}}{\to} M_1^*M_2^* = M^*$ が成り立つ。

(b) の場合は、M_1 と M_2 に関して定理が成り立つことから、定理 A.2 により、$N = M_3'[x := M_2'] \underset{\mathrm{p}}{\to} M_3^*[x := M_2^*] = M^*$ が成り立つ。 ■

A.4. 定理（Church–Rosser）

$M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N_1$ かつ $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N_2$ ならば、λ 式 L が存在して、$N_1 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ かつ $N_2 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ をみたす。

<u>証明</u>

$\underset{\mathrm{p}}{\to}$ を含み、反射律と推移律をみたす最小の 2 項関係は $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ に等しい。したがって、$M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N_1$ かつ $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N_2$ が成り立つとき、列

$$M = M_{0,0} \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{1,0} \underset{\mathrm{p}}{\to} \cdots \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{m,0} = N_1$$

$$M = M_{0,0} \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{0,1} \underset{\mathrm{p}}{\to} \cdots \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{0,n} = N_2$$

が存在する。$M_{0,0} \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{1,0}$ かつ $M_{0,0} \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{0,1}$ と定理 A.3 により、λ 式 $M_{1,1}$ が存在して、$M_{1,0} \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{1,1}$ かつ $M_{0,1} \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{1,1}$ をみたす。同様に、$M_{i,j} \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{i+1,j}$ かつ $M_{i,j} \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{i,j+1}$ が成り立つとき、λ 式 $M_{i+1,j+1}$ が存在して、$M_{i+1,j} \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{i+1,j+1}$ かつ $M_{i,j+1} \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{i+1,j+1}$ をみたす。これをくり返すことによって、$L = M_{m,n}$ が作られる。このとき、列

$$N_1 = M_{m,0} \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{m,1} \underset{\mathrm{p}}{\to} \cdots \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{m,n} = L$$

$$N_2 = M_{0,n} \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{1,n} \underset{\mathrm{p}}{\to} \cdots \underset{\mathrm{p}}{\to} M_{m,n} = L$$

が存在するから、$N_1 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ かつ $N_2 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ が成り立つ。 ■

A.2. 最左簡約定理

1.2 節で述べた最左簡約定理（定理 1.11）を証明する。

A.5. 定義（先頭簡約）

λ 式の 2 項関係 $\underset{\mathrm{h}}{\to}$ を、以下の 2 つの条件をみたす最小の 2 項関係として定義する。

1. $(\lambda x.M)N \underset{\mathrm{h}}{\to} M[x := N]$
2. $M \underset{\mathrm{h}}{\to} M'$ のとき、$MN \underset{\mathrm{h}}{\to} M'N$

さらに、2 項関係 $\underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow}$ を、$\underset{\mathrm{h}}{\to}$ を含み、反射律と推移律をみたす最小の 2 項関係として定義する。

A.6. 定義（標準簡約）

λ 式の 2 項関係 $\underset{\mathrm{s}}{\to}$ を、以下の 3 つの条件をみたす最小の 2 項関係として定義する。

1. $M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} x$ のとき、$M \underset{\mathrm{s}}{\to} x$

2. $M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} \lambda x.N_1$ かつ $N_1 \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} N_1'$ のとき、$M \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} \lambda x.N_1'$
3. $M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} N_1 N_2$ かつ $N_1 \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} N_1'$ かつ $N_2 \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} N_2'$ のとき、$M \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} N_1' N_2'$

A.7. 定理

$M \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M'$ かつ $N \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} N'$ ならば、$M[x := N] \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M'[x := N']$ が成り立つ。

証明

$\underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow}$ の定義により、一般に $M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} M'$ ならば $M[x := N] \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} M'[x := N]$ が成り立つ。また、$\underset{\mathrm{s}}{\rightarrow}$ の定義により、一般に $M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} M' \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M''$ ならば $M \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M''$ が成り立つ。これらを用いて、定理を M' の構造に関する帰納法で証明する。

1. $M' = y$（変数）のとき：

   $M \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M'$ が成り立つのは、$M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} y$ のときである。
   $y = x$ のとき、

   $$M[x := N] \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} x[x := N] = N \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} N' = M'[x := N']$$

   により、$M[x := N] \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M'[x := N']$ が成り立つ。
   $y \neq x$ のとき、

   $$M[x := N] \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} y[x := N] = y = M'[x := N']$$

   により、$M[x := N] \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M'[x := N']$ が成り立つ。

2. $M' = \lambda y.M_1'$ で、M_1' に関して定理が成り立つとき：

   $M \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M'$ が成り立つのは、$M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} \lambda y.M_1$ かつ $M_1 \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M_1'$ のときである。このとき、$M[x := N] \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} \lambda y.M_1[x := N]$ が成り立つ。さらに、M_1' に関して定理が成り立つことから、$M_1[x := N] \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M_1'[x := N']$ が成り立つ。したがって、

   $$M[x := N] \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} \lambda y.M_1'[x := N'] = M'[x := N']$$

   が成り立つ。

3. $M' = M_1' M_2'$ で、M_1' と M_2' に関して定理が成り立つとき：

   $M \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M'$ が成り立つのは、$M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} M_1 M_2$ かつ $M_1 \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M_1'$ かつ $M_2 \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M_2'$ のときである。このとき、$M[x := N] \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} M_1[x := N] M_2[x := N]$ が成り立つ。さらに、M_1 と M_2 に関して定理が成り立つことから、$M_1[x := N] \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M_1'[x := N']$ かつ $M_2[x := N] \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M_2'[x := N']$ が成り立つ。したがって、

   $$M[x := N] \underset{\mathrm{s}}{\rightarrow} M_1'[x := N'] M_2'[x := N'] = M'[x := N']$$

   が成り立つ。 ■

A.8. 定理

$M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$ ならば、$M \underset{\mathrm{s}}{\to} N$ が成り立つ。

証明

$\underset{\mathrm{s}}{\to}$ の定義により、$M \underset{\mathrm{s}}{\to} M$ が成り立つ。あとは $M \underset{\mathrm{s}}{\to} N \underset{\beta}{\to} L$ ならば $M \underset{\mathrm{s}}{\to} L$ が成り立つことを証明すれば十分である。N の構造に関する帰納法で証明する。

1. $N = x$（変数）のとき：

   $N \underset{\beta}{\to} L$ となる L は存在しない。

2. $N = \lambda x.N_1'$ で、N_1' に関して定理が成り立つとき：

   $M \underset{\mathrm{s}}{\to} N$ が成り立つのは、$M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} \lambda x.N_1$ かつ $N_1 \underset{\mathrm{s}}{\to} N_1'$ のときである。また、$N \underset{\beta}{\to} L$ が成り立つのは、$N_1' \underset{\beta}{\to} L_1$ かつ $L = \lambda x.L_1$ のときである。N_1' に関して定理が成り立つことから、$N_1 \underset{\mathrm{s}}{\to} L_1$ が成り立つ。これと $M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} \lambda x.N_1$ により、$M \underset{\mathrm{s}}{\to} \lambda x.L_1 = L$ が成り立つ。

3. $N = N_1'N_2'$ で、N_1' と N_2' に関して定理が成り立つとき：

   $M \underset{\mathrm{s}}{\to} N$ が成り立つのは、$M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} N_1N_2$ かつ $N_1 \underset{\mathrm{s}}{\to} N_1'$ かつ $N_2 \underset{\mathrm{s}}{\to} N_2'$ のときである。また、$N \underset{\beta}{\to} L$ が成り立つのは、

   (a) $N_1' \underset{\beta}{\to} L_1$ かつ $L = L_1N_2'$ のとき
   (b) $N_2' \underset{\beta}{\to} L_2$ かつ $L = N_1'L_2$ のとき
   (c) $N_1' = \lambda x.N_3$ かつ $L = N_3[x := N_2']$ のとき

   のどれかである。

   (a) の場合は、N_1' に関して定理が成り立つことから、$N_1 \underset{\mathrm{s}}{\to} L_1$ が成り立つ。これと $M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} N_1N_2$，$N_2 \underset{\mathrm{s}}{\to} N_2'$ により、$M \underset{\mathrm{s}}{\to} L_1N_2' = L$ が成り立つ。

   (b) の場合は、N_2' に関して定理が成り立つことから、$N_2 \underset{\mathrm{s}}{\to} L_2$ が成り立つ。これと $M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} N_1N_2$，$N_1 \underset{\mathrm{s}}{\to} N_1'$ により、$M \underset{\mathrm{s}}{\to} N_1'L_2 = L$ が成り立つ。

   (c) の場合は、$N_1 \underset{\mathrm{s}}{\to} N_1' = \lambda x.N_3$ により、$N_1 \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} \lambda x.N_3$ かつ $N_3 \underset{\mathrm{s}}{\to} N_3'$ となる。これと定理 A.7 により、

   $$M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} N_1N_2 \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} (\lambda x.N_3)N_2 \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} N_3[x := N_2] \underset{\mathrm{s}}{\to} N_3'[x := N_2'] = L$$

   が成り立つから、$M \underset{\mathrm{s}}{\to} L$ が成り立つ。 ■

A.9. 定理（最左簡約）

λ 式 M が β 正規形 N をもつならば、$M \underset{\mathrm{l}}{\twoheadrightarrow} N$ が成り立つ。

証明

定理 A.8 により $M \underset{\mathrm{s}}{\to} N$ が成り立つ。また、$\underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow}$ の定義により、一般に $M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} M'$ ならば $M \underset{\mathrm{l}}{\twoheadrightarrow} M'$ が成り立つ。これらを用いて、定理を N の構造に関する帰納法で証明する。

1. $N = x$（変数）のとき：
   $M \underset{\mathrm{s}}{\to} N$ が成り立つのは、$M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} x$ のときである。このとき、$M \underset{\mathrm{l}}{\twoheadrightarrow} x = N$ が成り立つ。
2. $N = \lambda x.N_1'$ で、N_1' に関して定理が成り立つとき：
   N_1 は β 正規形である。$M \underset{\mathrm{s}}{\to} N$ が成り立つのは、$M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} \lambda x.N_1$ かつ $N_1 \underset{\mathrm{s}}{\to} N_1'$ のときである。N_1' に関して定理が成り立つことから、$N_1 \underset{\mathrm{l}}{\twoheadrightarrow} N_1'$ が成り立つ。したがって、$M \underset{\mathrm{l}}{\twoheadrightarrow} \lambda x.N_1 \underset{\mathrm{l}}{\to} \lambda x.N_1' = N$ が成り立つ。
3. $N = N_1'N_2'$ で、N_1' と N_2' に関して定理が成り立つとき：
   N_1' と N_2' は β 正規形である。$M \underset{\mathrm{s}}{\to} N$ が成り立つのは、$M \underset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} N_1N_2$ かつ $N_1 \underset{\mathrm{s}}{\to} N_1'$ かつ $N_2 \underset{\mathrm{s}}{\to} N_2'$ のときである。N_1' と N_2' に関して定理が成り立つことから、$N_1 \underset{\mathrm{l}}{\twoheadrightarrow} N_1'$ かつ $N_2 \underset{\mathrm{l}}{\twoheadrightarrow} N_2'$ が成り立つ。したがって、$M \underset{\mathrm{l}}{\twoheadrightarrow} N_1N_2 \underset{\mathrm{l}}{\twoheadrightarrow} N_1'N_2 \underset{\mathrm{l}}{\twoheadrightarrow} N_1'N_2' = N$ が成り立つ。 ■

A.3. 強正規化定理

2.2 節で述べた強正規化定理（定理 2.11）を証明する。

A.10. 定義（帰着可能性）

$\Gamma \vdash M : \sigma$ のとき、M が Γ に関して**帰着可能**であることを、σ の構造に関して帰納的に定義する。

- $\sigma = \alpha$（基底型）のとき、M が Γ に関して帰着可能であるとは、M が強 β 正規化可能であることである。
- $\sigma = \sigma_1 \to \sigma_2$ のとき、M が Γ に関して帰着可能であるとは、$\Gamma \vdash N : \sigma_1$ で N が Γ に関して帰着可能となるような任意の λ 式 N に対して、MN が Γ に関して帰着可能となることである。

A.11. 定理

以下の命題が成り立つ。

(i) $\Gamma \vdash M : \sigma$ で、M が Γ に関して帰着可能ならば、M は強 β 正規化可能である。

(ii) $\Gamma \vdash xM_1 \cdots M_n : \sigma$ で、$M_1, \cdots, M_n$ が強 β 正規化可能ならば、$xM_1 \cdots M_n$ は Γ に関して帰着可能である。

<u>証明</u>

σ の構造に関する帰納法で (i) と (ii) を同時に証明する。

1. $\sigma = \alpha$（基底型）のとき：
   (i) 帰着可能性の定義により明らかである。
   (ii) $M_1, \cdots, M_n$ が強 β 正規化可能ならば、$xM_1 \cdots M_n$ も強 β 正規化可能だから、$xM_1 \cdots M_n$ は Γ に関して帰着可能である。

2. $\sigma = \sigma_1 \to \sigma_2$ で、σ_1 と σ_2 に関して (i) と (ii) が成り立つとき：

(i) 変数 $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ に対して、$\Gamma, x : \sigma_1 \vdash x : \sigma_1$ が成り立つ。σ_1 に関して (ii) が成り立つことから、x は $\Gamma, x : \sigma_1$ に関して帰着可能である。また、M は $\Gamma, x : \sigma_1$ に関して帰着可能である。したがって、Mx は $\Gamma, x : \sigma_1$ に関して帰着可能である。σ_2 に関して (i) が成り立つことから、Mx は強 β 正規化可能である。したがって、M は強 β 正規化可能である。

(ii) $\Gamma \vdash N : \sigma_1$ で、N が Γ に関して帰着可能であるような N を任意にとる。σ_1 に関して (i) が成り立つことから、N は強 β 正規化可能である。σ_2 に関して (ii) が成り立つことから、$xM_1 \cdots M_n N$ は Γ に関して帰着可能である。N は任意であったから、$xM_1 \cdots M_n$ は Γ に関して帰着可能である。 ■

A.12. 定理

$\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ かつ $\Gamma \vdash N : \sigma$ で、$M[x := N]$ と N が Γ に関して帰着可能ならば、$(\lambda x^\sigma . M)N$ は Γ に関して帰着可能である。

証明

$\tau = \tau_1 \to \cdots \to \tau_n \to \alpha$（$\alpha$ は基底型）とする。$\Gamma \vdash L_i : \tau_i$（$i \in \{1, \cdots, n\}$）で、各 L_i が Γ に関して帰着可能であるような L_i を任意にとる。$M[x := N]$ が Γ に関して帰着可能であることから、$M[x := N]L_1 \cdots L_n$ は強 β 正規化可能である。したがって、M, N, $L_1, \cdots, L_n$ はすべて強 β 正規化可能である。このとき、$(\lambda x^\sigma . M)NL_1 \cdots L_n$ から始まって無限に続く β 簡約の列が存在するとすれば、そのすべての β 簡約が M, N, $L_1, \cdots, L_n$ のそれぞれの中で行われることはない。すなわち、無限に続く β 簡約の列は

$$(\lambda x^\sigma . M)NL_1 \cdots L_n \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} (\lambda x^\sigma . M')N'L_1' \cdots L_n' \underset{\beta}{\to} M'[x := N']L_1' \cdots L_n' \underset{\beta}{\to} \cdots$$

のようになっている。これを用いて、

$$M[x := N]L_1 \cdots L_n \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} M'[x := N']L_1' \cdots L_n' \underset{\beta}{\to} \cdots$$

という無限に続く β 簡約の列を作ることができるが、これは $M[x := N]L_1 \cdots L_n$ が強 β 正規化可能であることに矛盾する。したがって、$(\lambda x^\sigma . M)NL_1 \cdots L_n$ は強 β 正規化可能である。L_i は任意であったから、$(\lambda x^\sigma . M)N$ は Γ に関して帰着可能である。 ■

A.13. 定理（強正規化）

型付け可能な λ 式は強 β 正規化可能である。

証明

定理 A.11 (i) により、「$\Gamma, x_1 : \sigma_1, \cdots, x_n : \sigma_n \vdash M : \tau$ かつ $\Gamma \vdash N_i : \sigma_i$（$i \in \{1, \cdots, n\}$）で、各 N_i が Γ に関して帰着可能ならば、$M' := M[x_1 := N_1] \cdots [x_n := N_n]$ は Γ に関して帰着可能で

ある」という補題を証明すれば十分である。M の構造に関する帰納法で証明する。$\Delta \coloneqq x_1 : \sigma_1, \cdots, x_n : \sigma_n$ とする。

1. $M = y$（変数）のとき：
   ある $i \in \{1, \cdots, n\}$ に対して $y = x_i$ のとき、$M' = N_i$ は Γ に関して帰着可能である。
   $y \neq x_i$（$i \in \{1, \cdots, n\}$）のとき、$M' = y$ となる。定理 A.11 (ii) により、M' は Γ に関して帰着可能である。

2. $M = \lambda y^{\tau_1}.M_1$ で、M_1 に関して補題が成り立つとき：
   ある型 τ_2 に対して、$\tau = \tau_1 \to \tau_2$ かつ $\Gamma, \Delta, y : \tau_1 \vdash M_1 : \tau_2$ である。$\Gamma \vdash L : \tau_2$ で、L が Γ に関して帰着可能であるような L を任意にとる。$M_1' \coloneqq M_1[x_1 \coloneqq N_1] \cdots [x_n \coloneqq N_n]$ とする。M_1 に関して補題が成り立つことから、$M_1'[y \coloneqq L]$ は Γ に関して帰着可能である。したがって、定理 A.12 により、$M'L = (\lambda y^{\tau_1}.M_1')L$ は Γ に関して帰着可能である。L は任意であったから、M' は Γ に関して帰着可能である。

3. $M = M_1 M_2$ で、M_1 と M_2 に関して補題が成り立つとき：
   ある型 τ_1 に対して、$\Gamma, \Delta \vdash M_1 : \tau_1 \to \tau$ かつ $\Gamma, \Delta \vdash M_2 : \tau_1$ である。M_1 と M_2 に関して補題が成り立つことから、$M_1' \coloneqq M_1[x_1 \coloneqq N_1] \cdots [x_n \coloneqq N_n]$ と $M_2' \coloneqq M_2[x_1 \coloneqq N_1] \cdots [x_n \coloneqq N_n]$ はどちらも Γ に関して帰着可能である。したがって、$M' = M_1' M_2'$ は Γ に関して帰着可能である。 ■

付録 B. 完備半順序集合

4.3 節で述べたとおり、完備半順序集合と連続函数の圏 **CPO** は型なし λ 計算の非自明なモデルになる。この付録では、圏 **CPO** を定義し、非自明な反射的対象を構成することで、このことを示す。

B.1. 定義（半順序集合）

半順序集合とは、集合 D とその上の 2 項関係 $\preccurlyeq$ の組 $(D, \preccurlyeq)$ であって、以下の条件をみたすもののことである。

1. 任意の $x \in D$ に対して、$x \preccurlyeq x$（反射律）
2. 任意の $x, y \in D$ に対して、$x \preccurlyeq y$ かつ $y \preccurlyeq x$ ならば、$x = y$（反対称律）
3. 任意の $x, y, z \in D$ に対して、$x \preccurlyeq y$ かつ $y \preccurlyeq z$ ならば、$x \preccurlyeq z$（推移律）

B.2. 定義（有向部分集合）

半順序集合 $(D, \preccurlyeq)$ の**有向部分集合**とは、部分集合 $X \subseteq D$ であって、以下の条件をみたすもののことである。

1. 任意の $x, y \in X$ に対して、ある $z \in X$ が存在して、$x \preccurlyeq z$ かつ $y \preccurlyeq z$ をみたす。

X が $(D, \preccurlyeq)$ の有向部分集合であることを、$X \subseteq (D, \preccurlyeq)$ と表す。

B.3. 定義（最小元）

半順序集合 $(D, \preccurlyeq)$ が**最小元**をもつとは、$\perp \in D$ が存在して、以下の条件をみたすことをいう。

1. 任意の $x \in D$ に対して、$\perp \preccurlyeq x$ が成り立つ。

このとき、$\perp$ は一意であり、最小元とよばれる。

B.4. 定義（上限）

半順序集合 $(D, \preccurlyeq)$ が**上限**をもつとは、任意の有向部分集合 $X \subseteq (D, \preccurlyeq)$ に対して、$\bigvee X \in D$ が存在して、以下の条件をみたすことをいう。

1. $\bigvee X$ は X の**上界**である。すなわち、任意の $x \in X$ に対して、$x \preccurlyeq \bigvee X$ が成り立つ。
2. 任意の $y \in D$ に対して、y が X の上界ならば、$\bigvee X \preccurlyeq d$ が成り立つ。

このとき、$\bigvee X$ は一意であり、X の上限とよばれる。

B.5. 定義（完備半順序集合）

最小元と上限をもつ半順序集合を**完備半順序集合**とよぶ。

B.6. 定義（連続函数）

完備半順序集合 $(D_1, \preccurlyeq_1)$ から完備半順序集合 $(D_2, \preccurlyeq_2)$ への**連続函数**とは、写像 $f : D_1 \longrightarrow D_2$ であって、以下の条件をみたすもののことである。

1. 任意の有向部分集合 $X \subseteq (D_1, \preccurlyeq_1)$ に対して、像 $\{f(x) \mid x \in X\} \subseteq D_2$ は $(D_2, \preccurlyeq_2)$ の有向部分集合である。
2. f は上限を保つ。すなわち、任意の有向部分集合 $X \subseteq (D_1, \preccurlyeq_1)$ に対して、$f(\bigvee X) = \bigvee\{f(x) \mid x \in X\}$ が成り立つ。

B.7. 定義（完備半順序集合と連続函数の圏）

完備半順序集合と連続函数の圏 **CPO** を以下のように定義する。

1. $\mathrm{Ob}\,\mathbf{CPO}$ は完備半順序集合全体の集まりである。
2. 各 $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{CPO}$ に対して、$\mathrm{Hom}(A, B)$ は A から B への連続函数全体の集合である。
3. 各 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ に対して、合成 $g \circ f : A \longrightarrow C$ は合成函数 $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ である。
4. 各 $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}$ に対して、恒等射 $\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$ は恒等函数 $\mathrm{id}_A(a) = a$ である。

圏 **CPO** はカーテシアン閉圏である。

- 終対象 $\mathbf{1}$ は単元集合 $\{*\}$ と自明な半順序の組である。$!_X : X \longrightarrow \mathbf{1}$ は $!_X(x) = *$ で与えられる。
- $A = (D_1, \preccurlyeq_1)$ と $B = (D_2, \preccurlyeq_2)$ の直積は直積集合 $D_1 \times D_2$ と半順序

$$(a, b) \preccurlyeq (a', b') \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad a \preccurlyeq_1 a' \,\wedge\, b \preccurlyeq_2 b'$$

 の組 $A \times B = (D_1 \times D_2, \preccurlyeq)$ であり、$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$ と $\pi_2 : A \times B \longrightarrow B$ は射影 $\pi_1(a, b) = a,\ \pi_2(a, b) = b$ である。$f : X \longrightarrow A$ と $g : X \longrightarrow B$ に対して、$\langle f, g\rangle : X \longrightarrow A \times B$ は $\langle f, g\rangle(x) = (f(x), g(x))$ で与えられる。
- $A = (D_1, \preccurlyeq_1)$ から $B = (D_2, \preccurlyeq_2)$ への冪は A から B への連続函数全体の集合 $\mathrm{Hom}(A, B)$ と半順序

$$f \preccurlyeq g \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall a \in D_1.\, f(a) \preccurlyeq_2 g(a)$$

 の組 $B^A = (\mathrm{Hom}(A, B), \preccurlyeq)$ であり、$\mathrm{app} : B^A \times A \longrightarrow B$ は評価函数 $\mathrm{app}(f, a) = f(a)$ である。$f : X \times A \longrightarrow B$ に対して、$\Lambda(f) : X \longrightarrow B^A$ は $\Lambda(f)(x)(a) = f(x, a)$ で与えられる。

B.8. 定理

圏 **CPO** は非自明な反射的対象をもつ。

<u>証明</u>

自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ の冪集合 $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ と包含関係 $\subseteq$ の組 $U := (\mathcal{P}(\mathbf{N}), \subseteq)$ は完備半順序集合をなす（包含関係に関する上限を $\bigcup$ によって表すことにする）。$\mathbf{N}$ の有限部分集合全体の集合を $\mathcal{P}_{\mathrm{F}}(\mathbf{N})$ とすると、全単射 $b : \mathcal{P}_{\mathrm{F}}(\mathbf{N}) \longrightarrow \mathbf{N}$ が存在する（たとえば、

$$b(x) = \sum_{n \in x} 2^n$$

により与えられる)。また、全単射 $p : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ が存在する(たとえば、

$$p(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$$

により与えられる)。連続函数 $f : U \longrightarrow U$ を U に埋め込むために、集合 $\mathrm{in}(f) \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ を

$$\mathrm{in}(f) = \{p(m,n) \,|\, m \in \mathbf{N},\, n \in f(b^{-1}(m))\}$$

によって定義する。このとき、任意の有向部分集合 $F \subseteq U^U$ に対して、

$$\begin{aligned}
\mathrm{in}(\textstyle\bigvee F) &= \{p(m,n) \,|\, m \in \mathbf{N},\, n \in (\textstyle\bigvee F)(b^{-1}(m))\} \\
&= \big\{p(m,n) \,\big|\, m \in \mathbf{N},\, n \in \textstyle\bigcup\{f(b^{-1}(m)) \,|\, f \in F\}\big\} \\
&= \{p(m,n) \,|\, m \in \mathbf{N},\, \exists f \in F.\, n \in f(b^{-1}(m))\} \\
&= \textstyle\bigcup\big\{\{p(m,n) \,|\, m \in \mathbf{N},\, n \in f(b^{-1}(m))\} \,\big|\, f \in F\big\} \\
&= \textstyle\bigcup\{\mathrm{in}(f) \,|\, f \in F\}
\end{aligned}$$

が成り立つから、$\mathrm{in} : U^U \longrightarrow U$ は連続函数である。また、集合 $x \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ に対して、写像 $\mathrm{out}(x) : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{N})$ を

$$\mathrm{out}(x)(y) = \{n \in \mathbf{N} \,|\, \exists m \in \mathbf{N}.\, p(m,n) \in x \,\wedge\, b^{-1}(m) \subseteq y\}$$

によって定義すると、任意の有向部分集合 $Y \subseteq U$ に対して、

$$\begin{aligned}
\mathrm{out}(x)(\textstyle\bigcup Y) &= \{n \in \mathbf{N} \,|\, \exists m \in \mathbf{N}.\, p(m,n) \in x \,\wedge\, b^{-1}(m) \subseteq \textstyle\bigcup Y\} \\
&= \{n \in \mathbf{N} \,|\, \exists y \in Y.\, \exists m \in \mathbf{N}.\, p(m,n) \in x \,\wedge\, b^{-1}(m) \subseteq y\} \\
&= \textstyle\bigcup\big\{\{n \in \mathbf{N} \,|\, \exists m \in \mathbf{N}.\, p(m,n) \in x \,\wedge\, b^{-1}(m) \subseteq y\} \,\big|\, y \in Y\big\} \\
&= \textstyle\bigcup\{\mathrm{out}(x)(y) \,|\, y \in Y\}
\end{aligned}$$

が成り立つから、$\mathrm{out}(x) : U \longrightarrow U$ は連続函数である。さらに、任意の有向部分集合 $X \subseteq U$ に対して、

$$\begin{aligned}
\mathrm{out}(\textstyle\bigcup X)(y) &= \{n \in \mathbf{N} \,|\, \exists m \in \mathbf{N}.\, p(m,n) \in \textstyle\bigcup X \,\wedge\, b^{-1}(m) \subseteq y\} \\
&= \{n \in \mathbf{N} \,|\, \exists x \in X.\, \exists m \in \mathbf{N}.\, p(m,n) \in x \,\wedge\, b^{-1}(m) \subseteq y\} \\
&= \textstyle\bigcup\big\{\{n \in \mathbf{N} \,|\, \exists m \in \mathbf{N}.\, p(m,n) \in x \,\wedge\, b^{-1}(m) \subseteq y\} \,\big|\, x \in X\big\} \\
&= \textstyle\bigcup\{\mathrm{out}(x)(y) \,|\, x \in X\} \\
&= (\textstyle\bigvee\{\mathrm{out}(x) \,|\, x \in X\})(y)
\end{aligned}$$

が成り立つから、$\mathrm{out} : U \longrightarrow U^U$ は連続函数である。このとき、

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{out} \circ \mathrm{in})(f)(x) &= \mathrm{out}(\mathrm{in}(f))(x) \\
&= \bigl\{ n \in \mathbf{N} \bigm| \exists m \in \mathbf{N}.\, p(m,n) \in \mathrm{in}(f) \ \wedge\ b^{-1}(m) \subseteq x \bigr\} \\
&= \bigl\{ n \in \mathbf{N} \bigm| \exists m \in \mathbf{N}.\, n \in f\bigl(b^{-1}(m)\bigr) \ \wedge\ b^{-1}(m) \subseteq x \bigr\} \\
&= \{ n \in \mathbf{N} \mid \exists y \in \mathcal{P}_{\mathbf{F}}(\mathbf{N}).\, n \in f(y) \ \wedge\ y \subseteq x \} \\
&= \{ n \in \mathbf{N} \mid n \in f(x) \} \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

となり、$\mathrm{out} \circ \mathrm{in} = \mathrm{id}_{U^U}$ が成り立つから、$(U, \mathrm{in}, \mathrm{out})$ は圏 **CPO** の反射的対象である。 ■

問題の解答

1.1 節

(1)

$$
\begin{aligned}
M = (\lambda x.\lambda y.\lambda z.y(xyz))(\lambda x.\lambda y.y) &\underset{\beta}{\to} \lambda y.\lambda z.y((\lambda x.\lambda y.y)yz) =: M_1 \\
&\underset{\beta}{\to} \lambda y.\lambda z.y((\lambda y.y)z) =: M_2 \\
&\underset{\beta}{\to} \lambda y.\lambda z.yz =: M_3 \\
&\underset{\eta}{\to} \lambda y.y =: M_4
\end{aligned}
$$

1.2 節

(1) (i) $M \underset{\beta}{=} N$ により、列

$$M = M_0 \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_1 \underset{\beta}{\leftrightarrow} \cdots \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_n = N$$

が存在する（ここで、$M_i \underset{\beta}{\to} M_j$ または $M_j \underset{\beta}{\to} M_i$ が成り立つことを $M_i \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_j$ と表している）。n に関する帰納法で定理を証明する。

1. $n = 0$ のとき：
   $L = M$ とすれば、$M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ かつ $N \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ が成り立つ。
2. $n \geq 1$ で、$n - 1$ に関して定理が成り立つとき：
   $n - 1$ に関して定理が成り立つことから、λ 式 L' が存在して、$M_1 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L'$ かつ $N \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L'$ をみたす。
   $M \underset{\beta}{\to} M_1$ のとき、$L = L'$ とすれば、$M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ かつ $N \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ が成り立つ。
   $M_1 \underset{\beta}{\to} M$ のとき、Church–Rosser の定理（定理 1.8）により、L を $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ かつ $L' \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ をみたすようにとれば、$M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ かつ $N \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ が成り立つ。

(ii) (i) により、λ 式 L が存在して、$M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ かつ $N \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} L$ をみたす。N は β 正規形であるから、$L = N$ である。したがって、$M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$ が成り立つ。

(iii) N と N' がともに M の β 正規形であるとすると、$M \underset{\beta}{=} N$ かつ $M \underset{\beta}{=} N'$ により、$N \underset{\beta}{=} N'$ が成り立つ。したがって、(ii) により、$N \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N'$ が成り立つ。N は β 正規形であるから、$N' = N$ である。 ■

1.3 節

(1) $F := \lambda p.\langle \mathsf{succ}(\mathsf{pr1}\,p), \hat{g}(\mathsf{pr1}\,p)(\mathsf{pr2}\,p)x_1 \cdots x_n \rangle$ とすると、

$$\hat{h} := \lambda y.\lambda x_1.\cdots\lambda x_n.\mathsf{pr2}\Big(yF\Big\langle \hat{0}, \hat{f}\,x_1 \cdots x_n \Big\rangle\Big)$$

と表される。このとき、

$$
\begin{aligned}
\hat{h}\,\hat{0}\,x_1\cdots x_n &\underset{\beta}{=} \mathsf{pr2}\Big(\hat{0}\,F\Big\langle\hat{0},\hat{f}\,x_1\cdots x_n\Big\rangle\Big)\\
&\underset{\beta}{=} \mathsf{pr2}\Big\langle\hat{0},\hat{f}\,x_1\cdots x_n\Big\rangle\\
&\underset{\beta}{=} \hat{f}\,x_1\cdots x_n
\end{aligned}
$$

が成り立つ。あとは、自然数 y に対して、

$$
\hat{h}\Big(\mathsf{succ}\,\hat{y}\Big)x_1\cdots x_n \underset{\beta}{=} \hat{g}\,\hat{y}\Big(\hat{h}\,\hat{y}x_1\cdots x_n\Big)x_1\cdots x_n
$$

が成り立つことを証明すれば十分である。そのために、補題

$$
\mathsf{succ}\,\hat{y}F\Big\langle\hat{0},\hat{f}\,x_1\cdots x_n\Big\rangle \underset{\beta}{=} \Big\langle\mathsf{succ}\,\hat{y},\hat{g}\,\hat{y}\Big(\hat{h}\,\hat{y}x_1\cdots x_n\Big)x_1\cdots x_n\Big\rangle
$$

が成り立つことを、y に関する帰納法で証明する。

1. $\hat{y}=\hat{0}$ のとき：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{succ}\,\hat{0}\,F\Big\langle\hat{0},\hat{f}\,x_1\cdots x_n\Big\rangle &\underset{\beta}{=} F\Big(\hat{0}\,F\Big\langle\hat{0},\hat{f}\,x_1\cdots x_n\Big\rangle\Big)\\
&\underset{\beta}{=} F\Big\langle\hat{0},\hat{f}\,x_1\cdots x_n\Big\rangle\\
&\underset{\beta}{=} F\Big\langle\hat{0},\hat{h}\,\hat{0}\,x_1\cdots x_n\Big\rangle\\
&\underset{\beta}{=} \Big\langle\mathsf{succ}\,\hat{0},\hat{g}\,\hat{0}\Big(\hat{h}\,\hat{0}\,x_1\cdots x_n\Big)x_1\cdots x_n\Big\rangle
\end{aligned}
$$

により成り立つ。

2. $\hat{y}=\mathsf{succ}\,\hat{y_1}$ で、$\hat{y_1}$ に関して補題が成り立つとき：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{succ}(\mathsf{succ}\,\hat{y_1})F\Big\langle\hat{0},\hat{f}\,x_1\cdots x_n\Big\rangle &\underset{\beta}{=} F\Big(\mathsf{succ}\,\hat{y_1}\,F\Big\langle\hat{0},\hat{f}\,x_1\cdots x_n\Big\rangle\Big)\\
&\underset{\beta}{=} F\Big\langle\mathsf{succ}\,\hat{y_1},\hat{g}\,\hat{y_1}\Big(\hat{h}\,\hat{y_1}\,x_1\cdots x_n\Big)x_1\cdots x_n\Big\rangle\\
&\underset{\beta}{=} F\Big\langle\mathsf{succ}\,\hat{y_1},\hat{h}(\mathsf{succ}\,\hat{y_1})x_1\cdots x_n\Big\rangle\\
&\underset{\beta}{=} \Big\langle\mathsf{succ}(\mathsf{succ}\,\hat{y_1}),\hat{g}(\mathsf{succ}\,\hat{y_1})\Big(\hat{h}(\mathsf{succ}\,\hat{y_1})x_1\cdots x_n\Big)x_1\cdots x_n\Big\rangle
\end{aligned}
$$

により成り立つ。 ■

(2) 例えば、

$$
\mathsf{div} := \lambda m.\lambda n.m\Big(\lambda p.\,\mathsf{lteq}\,n(\mathsf{succ}(\mathsf{pr2}\,p))\Big\langle\mathsf{succ}(\mathsf{pr1}\,p),\hat{0}\Big\rangle\langle\mathsf{pr1}\,p,\mathsf{succ}(\mathsf{pr2}\,p)\rangle\Big)\Big\langle\hat{0},\hat{0}\Big\rangle
$$

1.4 節

(1) 例えば、

$$
\widehat{\mathrm{Ack}} := \mathsf{fix}\Big(\lambda f.\lambda m.\lambda n.\,\mathsf{is\text{-}zero}\,m(\mathsf{succ}\,n)\Big(\mathsf{is\text{-}zero}\,n\Big(f(\mathsf{pred}\,m)\,\hat{1}\Big)(f(\mathsf{pred}\,m)(fm(\mathsf{pred}\,n)))\Big)\Big)
$$

このとき、

$$F := \lambda f.\lambda m.\lambda n.\,\textsf{is-zero}\,m(\textsf{succ}\,n)\Big(\textsf{is-zero}\,n\Big(f(\textsf{pred}\,m)\,\hat{1}\Big)(f(\textsf{pred}\,m)(fm(\textsf{pred}\,n)))\Big)$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{Ack}}\,\hat{1}\,\hat{1} &= \textsf{fix}\,F\,\hat{1}\,\hat{1} \underset{\beta}{=} F(\textsf{fix}\,F)\,\hat{1}\,\hat{1} \\
&\underset{\beta}{=} \textsf{is-zero}\,\hat{1}\Big(\textsf{succ}\,\hat{1}\Big)\Big(\textsf{is-zero}\,\hat{1}\Big(\textsf{fix}\,F\Big(\textsf{pred}\,\hat{1}\Big)\,\hat{1}\Big)\Big(\textsf{fix}\,F\Big(\textsf{pred}\,\hat{1}\Big)\Big(\textsf{fix}\,F\,\hat{1}\Big(\textsf{pred}\,\hat{1}\Big)\Big)\Big)\Big) \\
&\underset{\beta}{=} \textsf{fix}\,F\Big(\textsf{pred}\,\hat{1}\Big)\Big(\textsf{fix}\,F\,\hat{1}\Big(\textsf{pred}\,\hat{1}\Big)\Big) \underset{\beta}{=} F(\textsf{fix}\,F)\,\hat{0}\Big(\textsf{fix}\,F\,\hat{1}\,\hat{0}\Big) \\
&\underset{\beta}{=} \textsf{is-zero}\,\hat{0}\Big(\textsf{succ}\Big(\textsf{fix}\,F\,\hat{1}\,\hat{0}\Big)\Big) \\
&\qquad\Big(\textsf{is-zero}\Big(\textsf{fix}\,F\,\hat{1}\,\hat{0}\Big)\Big(\textsf{fix}\,F\Big(\textsf{pred}\,\hat{0}\Big)\,\hat{1}\Big)\Big(\textsf{fix}\,F\Big(\textsf{pred}\,\hat{0}\Big)\Big(\textsf{fix}\,F\,\hat{0}\Big(\textsf{pred}\Big(\textsf{fix}\,F\,\hat{1}\,\hat{0}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \\
&\underset{\beta}{=} \textsf{succ}\Big(\textsf{fix}\,F\,\hat{1}\,\hat{0}\Big) \underset{\beta}{=} \textsf{succ}\Big(F(\textsf{fix}\,F)\,\hat{1}\,\hat{0}\Big) \\
&\underset{\beta}{=} \textsf{succ}\Big(\textsf{is-zero}\,\hat{1}\Big(\textsf{succ}\,\hat{0}\Big)\Big(\textsf{is-zero}\,\hat{0}\Big(\textsf{fix}\,F\Big(\textsf{pred}\,\hat{1}\Big)\,\hat{1}\Big)\Big(\textsf{fix}\,F\Big(\textsf{pred}\,\hat{1}\Big)\Big(\textsf{fix}\,F\,\hat{1}\Big(\textsf{pred}\,\hat{0}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \\
&\underset{\beta}{=} \textsf{succ}\Big(\textsf{fix}\,F\Big(\textsf{pred}\,\hat{1}\Big)\,\hat{1}\Big) \underset{\beta}{=} \textsf{succ}\Big(F(\textsf{fix}\,F)\,\hat{0}\,\hat{1}\Big) \\
&\underset{\beta}{=} \textsf{succ}\Big(\textsf{is-zero}\,\hat{0}\Big(\textsf{succ}\,\hat{1}\Big)\Big(\textsf{is-zero}\,\hat{1}\Big(\textsf{fix}\,F\Big(\textsf{pred}\,\hat{0}\Big)\,\hat{1}\Big)\Big(\textsf{fix}\,F\Big(\textsf{pred}\,\hat{0}\Big)\Big(\textsf{fix}\,F\,\hat{0}\Big(\textsf{pred}\,\hat{1}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \\
&\underset{\beta}{=} \textsf{succ}\Big(\textsf{succ}\,\hat{1}\Big) \underset{\beta}{=} \hat{3}
\end{aligned}$$

となる。

(2) β 同値性が決定可能ならば、λ 式 B が存在して、

$$B\lceil M\rceil\lceil N\rceil = \begin{cases}\textsf{true} & (M \underset{\beta}{=} N \text{ のとき}) \\ \textsf{false} & (M \underset{\beta}{\neq} N \text{ でないとき})\end{cases}$$

が成り立つ。このとき、$N \underset{\beta}{=} N'$ ならば $B\lceil M\rceil\lceil N\rceil \underset{\beta}{=} B\lceil M\rceil\lceil N'\rceil$ が成り立つ。また、$B\lceil M\rceil\lceil M\rceil \underset{\beta}{=} \textsf{true}$ が成り立ち、変数 x, y（$x \neq y$）に対して、$M \underset{\beta}{=} x$ ならば $B\lceil M\rceil\lceil y\rceil \underset{\beta}{=} \textsf{false}$，$M \underset{\beta}{=} x$ でないならば $B\lceil M\rceil\lceil x\rceil \underset{\beta}{=} \textsf{false}$ が成り立つ。しかし、このような $B\lceil M\rceil$ の存在は Rice の定理（定理 1.17）によって否定される。 ■

2.1 節

(1) (i) M の構造に関する帰納法で証明する。

1. $M = z$（変数）のとき：
   $z = x$ のとき、$\sigma = \tau$ であるから、$\Gamma, y:\rho, x:\tau, \Delta \vdash M:\sigma$ である。
   $z = y$ のとき、$\sigma = \rho$ であるから、$\Gamma, y:\rho, x:\tau, \Delta \vdash M:\sigma$ である。
   $z \neq x$ かつ $z \neq y$ のとき、Γ または Δ の中に $z:\sigma$ が含まれる。したがって、$\Gamma, y:\rho, x:\tau, \Delta \vdash M:\sigma$ である。
2. $M = \lambda z^{\sigma_1}.M_1$ で、M_1 に関して定理が成り立つとき：
   ある型 σ_2 に対して、$\sigma = \sigma_1 \to \sigma_2$ かつ $\Gamma, x:\tau, y:\rho, \Delta, z:\sigma_1 \vdash M_1:\sigma_2$ である。

M_1 に関して定理が成り立つことから、$\Gamma, y:\rho, x:\tau, \Delta, z:\sigma_1 \vdash M_1 : \sigma_2$ である。したがって、$\Gamma, y:\rho, x:\tau, \Delta \vdash M : \sigma$ である。

3. $M = M_1 M_2$ で、M_1 と M_2 に関して定理が成り立つとき：
ある型 σ_1 に対して、$\Gamma, x:\tau, y:\rho, \Delta \vdash M_1 : \sigma_1 \to \sigma$ かつ $\Gamma, x:\tau, y:\rho, \Delta \vdash M_2 : \sigma_1$ である。M_1 と M_2 に関して定理が成り立つことから、$\Gamma, y:\rho, x:\tau, \Delta \vdash M_1 : \sigma_1 \to \sigma$ かつ $\Gamma, y:\rho, x:\tau, \Delta \vdash M_2 : \sigma_1$である。したがって、$\Gamma, y:\rho, x:\tau, \Delta \vdash M : \sigma$ である。

(ii) M の構造に関する帰納法で証明する。

1. $M = y$（変数）のとき：
Γ に $y:\sigma$ が含まれるから、$\Gamma, x:\tau \vdash M : \sigma$ である。
2. $M = \lambda y^{\sigma_1}.M_1$ で、M_1 に関して定理が成り立つとき：
ある型 σ_2 に対して、$\sigma = \sigma_1 \to \sigma_2$ かつ $\Gamma, y:\sigma_1 \vdash M_1 : \sigma_2$ である。M_1 に関して定理が成り立つことから、$\Gamma, y:\sigma_1, x:\tau \vdash M_1 : \sigma_2$ である。これと (i) により、$\Gamma, x:\tau, y:\sigma_1 \vdash M_1 : \sigma_2$ である。したがって、$\Gamma, x:\tau \vdash M : \sigma$ である。
3. $M = M_1 M_2$ で、M_1 と M_2 に関して定理が成り立つとき：
ある型 σ_1 に対して、$\Gamma \vdash M_1 : \sigma_1 \to \sigma$ かつ $\Gamma \vdash M_2 : \sigma_1$ である。M_1 と M_2 に関して定理が成り立つことから、$\Gamma, x:\tau \vdash M_1 : \sigma_1 \to \sigma$ かつ $\Gamma, x:\tau \vdash M_2 : \sigma_1$である。したがって、$\Gamma, x:\tau \vdash M : \sigma$ である。 ■

2.2 節

(1) 定理 1.9 (i) により、λ 式 L が存在して、$M \twoheadrightarrow_\beta L$ かつ $N \twoheadrightarrow_\beta L$ をみたす。このとき、主部簡約定理（定理 2.8）により、$\Gamma \vdash L : \sigma$ かつ $\Gamma \vdash L : \sigma'$ である。したがって、型付けの一意性（定理 2.7）により、$\sigma = \sigma'$ である。 ■

(2) 定理 1.13 により、すべての不動点コンビネータは弱 β 正規化不可能だから、強正規化定理（定理 2.11）により、型付け不可能である。 ■

2.3 節

(1) 真理値の型 Bool と、項 true, false : Bool は以下のように定義される。

$$\mathsf{Bool} := \Pi\alpha^*.\alpha \to \alpha \to \alpha$$
$$\mathsf{true} := \lambda\alpha^*.\lambda t^\alpha.\lambda f^\alpha.t : \mathsf{Bool}$$
$$\mathsf{false} := \lambda\alpha^*.\lambda t^\alpha.\lambda f^\alpha.f : \mathsf{Bool}$$

また、型 σ の項を要素にもつリストの型 List_σ と、項 $\mathsf{nil}_\sigma : \mathsf{List}_\sigma$，$\mathsf{cons}_\sigma : \sigma \to \mathsf{List}_\sigma \to \mathsf{List}_\sigma$ は以下のように定義される。

$$\mathsf{List}_\sigma := \Pi\alpha^*.(\sigma \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$$
$$\mathsf{nil}_\sigma := \lambda\alpha^*.\lambda c^{\sigma\to\alpha\to\alpha}.\lambda n^\alpha.n : \mathsf{List}_\sigma$$
$$\mathsf{cons}_\sigma := \lambda h^\sigma.\lambda t^{\mathsf{List}_\sigma}.\lambda\alpha^*.\lambda c^{\sigma\to\alpha\to\alpha}.\lambda n^\alpha.ch(t\alpha cn) : \sigma \to \mathsf{List}_\sigma \to \mathsf{List}_\sigma$$

(2) 函数 $\mathrm{zero}, \mathrm{succ}, \mathrm{pr}_i^n$ は

$$\widehat{\mathrm{zero}} = \lambda x^{\mathsf{Nat}}.\,\hat{0} : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}$$
$$\widehat{\mathrm{succ}} = \lambda x^{\mathsf{Nat}}.\,\mathsf{succ}\,x : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}$$
$$\widehat{\mathrm{pr}_i^n} = \lambda x_1^{\mathsf{Nat}}.\cdots\lambda x_n^{\mathsf{Nat}}.x_i : \underbrace{\mathsf{Nat} \to \cdots \to \mathsf{Nat}}_{n\,個} \to \mathsf{Nat}$$

のように表現される。$f : \mathbf{N}^m \to \mathbf{N}$ と $g_1, \cdots, g_m : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ の合成 $h : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ は

$$\hat{h} = \lambda x_1^{\mathsf{Nat}}.\cdots\lambda x_n^{\mathsf{Nat}}.\,\hat{f}(\hat{g_1}\,x_1\cdots x_n)\cdots(\widehat{g_m}\,x_1\cdots x_n) : \underbrace{\mathsf{Nat} \to \cdots \to \mathsf{Nat}}_{n\,個} \to \mathsf{Nat}$$

のように表現される。$f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ と $g : \mathbf{N}^{n+2} \to \mathbf{N}$ から原始帰納法によって生成される函数 $h : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ は

$$\begin{aligned}\hat{h} = {} & \lambda y^{\mathsf{Nat}}.\lambda x_1^{\mathsf{Nat}}.\cdots\lambda x_n^{\mathsf{Nat}}.\\ & \mathsf{pr2}\Big(y(\mathsf{Nat}\times\mathsf{Nat})\big(\lambda p^{\mathsf{Nat}\times\mathsf{Nat}}.\langle \mathsf{succ}(\mathsf{pr1}\,p), \hat{g}(\mathsf{pr1}\,p)(\mathsf{pr2}\,p)x_1\cdots x_n\rangle\big)\Big\langle\hat{0}, \hat{f}\,x_1\cdots x_n\Big\rangle\Big)\end{aligned}$$

のように表現される（ここで、$\langle a, b\rangle := \mathsf{pair}_{\mathsf{Nat},\,\mathsf{Nat}}\,ab : \mathsf{Nat}\times\mathsf{Nat}$ であり、

$$\mathsf{pr1} := \lambda p^{\mathsf{Nat}\times\mathsf{Nat}}.p\,\mathsf{Nat}\big(\lambda a^{\mathsf{Nat}}.\lambda b^{\mathsf{Nat}}.a\big) : \mathsf{Nat}\times\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}$$
$$\mathsf{pr2} := \lambda p^{\mathsf{Nat}\times\mathsf{Nat}}.p\,\mathsf{Nat}\big(\lambda a^{\mathsf{Nat}}.\lambda b^{\mathsf{Nat}}.b\big) : \mathsf{Nat}\times\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}$$

である)。

2.5 節

(1) $\mathcal{S} = \{*, \square\}$, $\mathcal{A} = \{(*, \square)\}$, $\mathcal{R} = \{(*, *, *)\}$ で与えられる純粋型システムの推論規則は以下のとおりである。

1. 公理：

$$\frac{}{\vdash * : \square}$$

2. 変数： $s \in \{*, \square\}$, $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$$

3. 弱化： $s \in \{*, \square\}$, $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash C : s}{\Gamma, x : C \vdash A : B}$$

4. Π 型：

$$\frac{\Gamma \vdash A : * \quad \Gamma, x : A \vdash B : *}{\Gamma \vdash \Pi x^A . B : *}$$

5. λ 抽象： $s \in \{*, \square\}$ に対して、

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : C \quad \Gamma \vdash \Pi x^A . C : s}{\Gamma \vdash \lambda x^A . B : \Pi x^A . C}$$

6. 適用：

$$\frac{\Gamma \vdash A : \Pi x^D . C \quad \Gamma \vdash B : D}{\Gamma \vdash AB : C[x := B]}$$

7. β 変換： $B' \underset{\beta}{=} B$ のとき、$s \in \{*, \square\}$ に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A : B' \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash A : B}$$

$A \neq *$ に対して $\Gamma \vdash A : \square$ を導出するための推論規則が存在しないことから、$A : s$ は $* : \square$ または $A : *$ のどちらかであるとしてよい。また、$\Gamma \vdash * : \square$ は公理、変数、弱化の規則によってつねに導出できるから、省略してよい。したがって、推論規則は以下のように書きかえられる。

1. 変数： $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ に対して、

$$\frac{}{\Gamma, x : * \vdash x : *} \qquad \frac{\Gamma \vdash A : *}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$$

2. 弱化： $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A : B}{\Gamma, x : * \vdash A : B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash C : *}{\Gamma, x : C \vdash A : B}$$

3. Π 型：

$$\frac{\Gamma \vdash A : * \quad \Gamma, x : A \vdash B : *}{\Gamma \vdash \Pi x^A . B : *}$$

4. λ 抽象：

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : C \quad \Gamma \vdash \Pi x^A . C : *}{\Gamma \vdash \lambda x^A . B : \Pi x^A . C}$$

5. 適用：

$$\frac{\Gamma \vdash A : \Pi x^D . C \quad \Gamma \vdash B : D}{\Gamma \vdash AB : C[x := B]}$$

6. β 変換： $B' \underset{\beta}{=} B$ のとき、

$$\frac{\Gamma \vdash A : B' \quad \Gamma \vdash B : *}{\Gamma \vdash A : B}$$

さらに、$\Gamma \vdash A : *$ の導出が項に依存することはないから、Π 型はつねに $\to$ を用いて表される。このとき、型に β 基が含まれることはないから、β 変換の規則は不要である。

1. 変数： $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ に対して、

$$\frac{}{\Gamma, x : * \vdash x : *} \qquad \frac{\Gamma \vdash A : *}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$$

2. 弱化： $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ に対して、

$$\frac{\Gamma \vdash A : B}{\Gamma, x : * \vdash A : B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash C : *}{\Gamma, x : C \vdash A : B}$$

3. Π 型：

$$\frac{\Gamma \vdash A : * \quad \Gamma \vdash B : *}{\Gamma \vdash A \to B : *}$$

4. λ 抽象：

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : C \quad \Gamma \vdash A \to C : *}{\Gamma \vdash \lambda x^A.B : A \to C}$$

5. 適用：

$$\frac{\Gamma \vdash A : D \to C \quad \Gamma \vdash B : D}{\Gamma \vdash AB : C}$$

これらのうち型の導出にかかわる変数、弱化、Π 型の規則を型の定義として分離し、文脈と推論規則には (項) : (型) だけを含めるようにしたうえで、変数と弱化の規則を 1 つにまとめたのが、2.1 節で扱った $\lambda\!\to$ の定義である。

3.1 節

(1) (i) $\Gamma \coloneqq B \to C, A \to B, A$ とする。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash B \to C} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \to B} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash C}}{B \to C, A \to B \vdash A \to C}}{B \to C \vdash (A \to B) \to A \to C}}{\vdash (B \to C) \to (A \to B) \to A \to C}$$

(ii) $\Gamma \coloneqq A \to B \to C, B, A$ とする。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \to B \to C} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B \to C} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash C}}{A \to B \to C, B \vdash A \to C}}{A \to B \to C \vdash B \to A \to C}}{\vdash (A \to B \to C) \to B \to A \to C}$$

(iii)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}}{A \vdash B \to A}}{\vdash A \to B \to A}$$

(iv) $\Gamma \coloneqq A \to A \to B, A$ とする。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \to A \to B} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash A \to B} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B}}{A \to A \to B \vdash A \to B}}{\vdash (A \to A \to B) \to A \to B}$$

(2) (i)

$$\dfrac{}{\vdash t = t}$$

(ii)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t = u \vdash t = u} \quad \dfrac{}{t = u \vdash t = t}}{t = u \vdash u = t}}{\vdash t = u \to u = t}$$

(iii)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t = u, u = v \vdash u = v} \quad \dfrac{}{t = u, u = v \vdash t = u}}{t = u, u = v \vdash t = v}}{t = u \vdash u = v \to t = v}}{\vdash t = u \to u = v \to t = v}$$

3.2 節

(1)

$$\mathsf{B} \coloneqq \lambda x^{B \to C}.\lambda y^{A \to B}.\lambda z^{A}.x(yz) : (B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$$

$$\mathsf{C} \coloneqq \lambda x^{A \to B \to C}.\lambda y^{B}.\lambda z^{A}.xzy : (A \to B \to C) \to B \to A \to C$$

$$\mathsf{K} \coloneqq \lambda x^{A}.\lambda y^{B}.x : A \to B \to A$$

$$\mathsf{W} \coloneqq \lambda x^{A \to A \to B}.\lambda y^{A}.xyy : (A \to A \to B) \to A \to B$$

(2)

$$\mathsf{refl} \coloneqq \lambda \alpha^{*}.\lambda x^{\alpha}.\lambda \beta^{\alpha \to *}.\,\mathsf{id}(\beta x) : \Pi \alpha^{*}.\Pi x^{\alpha}.(x = x)_{\alpha}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{inv} \coloneqq{}& \lambda \alpha^{*}.\lambda x^{\alpha}.\lambda y^{\alpha}.\lambda p^{(x=y)_{\alpha}}.p\Big(\lambda z^{\alpha}.(z = x)_{\alpha}\Big)(\mathsf{refl}\,\alpha x)\\ &: \Pi \alpha^{*}.\Pi x^{\alpha}.\Pi y^{\alpha}.(x = y)_{\alpha} \to (y = x)_{\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{concat} \coloneqq{}& \lambda \alpha^{*}.\lambda x^{\alpha}.\lambda y^{\alpha}.\lambda z^{\alpha}.\lambda p^{(x=y)_{\alpha}}.\lambda q^{(y=z)_{\alpha}}.q\Big(\lambda w^{\alpha}.(x = w)_{\alpha}\Big)p\\ &: \Pi \alpha^{*}.\Pi x^{\alpha}.\Pi y^{\alpha}.\Pi z^{\alpha}.(x = y)_{\alpha} \to (y = z)_{\alpha} \to (x = z)_{\alpha}\end{aligned}$$

4.1 節

(1) 圏の定義をみたしていることは以下のように示される。定義により、射はすべて一意的である。

- 導出

$$\dfrac{\dfrac{A, B \vdash C}{A \vdash B \to C} \quad A \vdash B}{A \vdash C}$$

により、$A \vdash B$ と $B \vdash C$ が証明できるならば $A \vdash C$ も証明できるから、各 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ に対して、合成 $g \circ f : A \longrightarrow C$ が存在する。

- $A \vdash A$ はつねに証明できるから、恒等射 $\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$ が存在する。

カーテシアン閉圏であることは以下のように示される。

- 終対象 $\mathbf{1}$ は真の命題（たとえば、$A \to A$）である。$X \vdash \mathbf{1}$ はつねに証明できるから、$!_X : X \longrightarrow \mathbf{1}$ が存在する。
- 直積 $A \times B$ は命題 $A \wedge B$ であり、$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$ と $\pi_2 : A \times B \longrightarrow B$ は $\wedge$ の除去則に対応する。$\wedge$ の導入則により、$f : X \longrightarrow A$ と $g : X \longrightarrow B$ に対して、$\langle f, g \rangle : X \longrightarrow A \times B$ が存在する。
- 冪 B^A は命題 $A \to B$ であり、$\mathrm{app} : B^A \times A \longrightarrow B$ は $\to$ の除去則（前件肯定）に対応する。導出

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{X, A, X \wedge A \vdash B}{X, A \vdash X \wedge A \to B} \quad \dfrac{\dfrac{}{X, A \vdash X} \quad \dfrac{}{X, A \vdash A}}{X, A \vdash X \wedge A}}{X, A \vdash B}}{X \vdash A \to B}$$

により、$X \wedge A \vdash B$ が証明できるならば $X \vdash A \to B$ も証明できるから、$f : X \times A \longrightarrow B$ に対して、$\Lambda(f) : X \longrightarrow B^A$ が存在する。

4.2 節

(1) まず、(E1) 〜 (E6) を仮定して、(E1a) 〜 (E6b) を証明する。

(E1a) (E1) により明らかである。

(E1b) (E1) により明らかである。

(E4a)

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle \circ h &= \left\langle \pi_1^{A \times B} \circ \langle f, g \rangle \circ h, \pi_2^{A \times B} \circ \langle f, g \rangle \circ h \right\rangle \quad \because \text{(E4)} \\ &= \langle f \circ h, g \circ h \rangle \quad \because \text{(E2), (E3)} \end{aligned}$$

(E4b) (E4) により明らかである。

(E5a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{app}_{B^A} \circ \langle \Lambda(f), g\rangle &= \mathrm{app}_{B^A} \circ \big\langle \Lambda(f) \circ \pi_1^{X\times A} \circ \langle \mathrm{id}_X, g\rangle, \pi_2^{X\times A} \circ \langle \mathrm{id}_X, g\rangle\big\rangle \quad \because \text{(E2), (E3)} \\
&= \mathrm{app}_{B^A} \circ \big\langle \Lambda(f) \circ \pi_1^{X\times A}, \pi_2^{X\times A}\big\rangle \circ \langle \mathrm{id}_X, g\rangle \quad \because \text{(E4a)} \\
&= f \circ \langle \mathrm{id}_X, g\rangle \quad \because \text{(E5)}
\end{aligned}
$$

(E6a)

$$
\begin{aligned}
\Lambda(f) \circ g &= \Lambda\big(\mathrm{app}_{B^A} \circ \big\langle \Lambda(f) \circ g \circ \pi_1^{Y\times A}, \pi_2^{Y\times A}\big\rangle\big) \quad \because \text{(E6)} \\
&= \Lambda\big(\mathrm{app}_{B^A} \circ \big\langle \Lambda(f) \circ \pi_1^{X\times A} \circ \big\langle g \circ \pi_1^{Y\times A}, \pi_2^{Y\times A}\big\rangle, \pi_2^{X\times A} \circ \big\langle g \circ \pi_1^{Y\times A}, \pi_2^{Y\times A}\big\rangle\big\rangle\big) \\
&\qquad \because \text{(E2), (E3)} \\
&= \Lambda\big(\mathrm{app}_{B^A} \circ \big\langle \Lambda(f) \circ \pi_1^{X\times A}, \pi_2^{X\times A}\big\rangle \circ \big\langle g \circ \pi_1^{Y\times A}, \pi_2^{Y\times A}\big\rangle\big) \quad \because \text{(E4a)} \\
&= \Lambda\big(f \circ \big\langle g \circ \pi_1^{Y\times A}, \pi_2^{Y\times A}\big\rangle\big) \quad \because \text{(E5)}
\end{aligned}
$$

(E6b)

$$
\begin{aligned}
\Lambda(\mathrm{app}_{B^A}) &= \Lambda\Big(\mathrm{app}_{B^A} \circ \Big\langle \pi_1^{B^A\times A}, \pi_2^{B^A\times A}\Big\rangle\Big) \quad \because \text{(E4b)} \\
&= \mathrm{id}_{B^A} \quad \because \text{(E6)}
\end{aligned}
$$

次に、(E1a) 〜 (E6b) を仮定して、(E1) 〜 (E6) を証明する。

(E1)

$$
\begin{aligned}
!_X &= !_{\mathbf{1}} \circ f \quad \because \text{(E1a)} \\
&= f \quad \because \text{(E1b)}
\end{aligned}
$$

(E4)

$$
\begin{aligned}
\big\langle \pi_1^{A\times B} \circ h, \pi_2^{A\times B} \circ h\big\rangle &= \big\langle \pi_1^{A\times B}, \pi_2^{A\times B}\big\rangle \circ h \quad \because \text{(E4a)} \\
&= h \quad \because \text{(E4b)}
\end{aligned}
$$

(E5)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{app}_{B^A} \circ \big\langle \Lambda(f) \circ \pi_1^{X\times A}, \pi_2^{X\times A}\big\rangle \\
&= \mathrm{app}_{B^A} \circ \Big\langle \Lambda\Big(f \circ \Big\langle \pi_1^{X\times A} \circ \pi_1^{(X\times A)\times A}, \pi_2^{(X\times A)\times A}\Big\rangle\Big), \pi_2^{X\times A}\Big\rangle \quad \because \text{(E6a)} \\
&= f \circ \Big\langle \pi_1^{X\times A} \circ \pi_1^{(X\times A)\times A}, \pi_2^{(X\times A)\times A}\Big\rangle \circ \big\langle \mathrm{id}_{X\times A}, \pi_2^{X\times A}\big\rangle \quad \because \text{(E5a)} \\
&= f \circ \Big\langle \pi_1^{X\times A} \circ \pi_1^{(X\times A)\times A} \circ \big\langle \mathrm{id}_{X\times A}, \pi_2^{X\times A}\big\rangle, \pi_2^{(X\times A)\times A} \circ \big\langle \mathrm{id}_{X\times A}, \pi_2^{X\times A}\big\rangle\Big\rangle \quad \because \text{(E4a)} \\
&= f \circ \big\langle \pi_1^{X\times A}, \pi_2^{X\times A}\big\rangle \quad \because \text{(E2), (E3)} \\
&= f \quad \because \text{(E4b)}
\end{aligned}
$$

(E6)

$$
\begin{aligned}
\Lambda\big(\mathrm{app}_{B^A} \circ \big\langle g \circ \pi_1^{X\times A}, \pi_2^{X\times A}\big\rangle\big) &= \Lambda(\mathrm{app}_{B^A}) \circ g \quad \because \text{(E6a)} \\
&= g \quad \because \text{(E6b)}
\end{aligned}
$$

■

参考文献

[1] H. P. Barendregt, *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **103**, (1984)

[2] H. P. Barendregt, *Lambda Calculi with Types*, in *Handbook of Logic in Computer Science*, Vol. 2 (1991), pp. 117–309

[3] C. Paulin-Mohring, *Inductive Definitions in the System Coq Rules and Properties*, in *Typed Lambda Calculi and Applications* (1993), pp. 328–345

[4] B. C. Pierce, *Types and Programming Languages* (MIT Press, 2002)

[5] M. H. Sørensen and P. Urzyczyn, *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism* (Elsevier, 2006)

[6] 大堀淳, プログラミング言語の基礎理論 (共立出版, 2019)

[7] 鹿島亮, *A Proof of the Standardization Theorem in λ-Calculus*, 数理解析研究所講究録 **1217**, 37 (2001)

[8] 萩谷昌己 and 西崎真也, 論理と計算のしくみ (岩波書店, 2007)

[9] 横内寛文, プログラム意味論 (共立出版, 1994)