関山実

新たな数学としてのホモトピー型理論

1 型理論と様々な同一視

1.1 そもそも型理論とは何か

型理論というのは、ある「**型**」と、その型の「**項**」について考える理論です。例えば、

自然数型 $\mathbb{N}$ とその項 $n : \mathbb{N}$

などは、型理論における典型的な考察対象です。プログラミングで出てくるような、**string** 型なども型の例です。

1.2 単純型

与えられた型 A や B をもちいて、関数型 $A \to B$ や積型 $A \times B$ などを作ることができます。これらは集合論になぞらえると、関数全体の集合 B^A や直積 $A \times B$ と解釈することができます。また、$\mathbf{1}$ 型や $\emptyset$ 型も存在します。これらは集合論的には 1 点集合や空集合に対応します。

1.3 Curry-Howard 同型

単純型理論と直観主義論理のあいだに、綿密な対応が存在します。これを Curry-Howard **同型**といいます。

型理論	直観主義命題論理
型 A	命題 A
項 $a : A$	命題 A の証明
関数型 $A \to B$	含意 $A \Rightarrow B$
積型 $A \times B$	かつ $A \wedge B$
和型 $A + B$	かつ $A \vee B$
$\emptyset, \mathbf{1}$	$\bot, \top$

1.4 自然数型

次に自然数を考えます。高校の数学で**数学的帰納法**を勉強しますが、自然数はそのような性質で特徴づけられていると考えられます。つまり、

- $0 : \mathbb{N}$ がある。
- 次の数 $\mathrm{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ がある。
- 型 $P(0)$ の項が存在するとき、任意の $k : \mathbb{N}$ に対して $P(k) \to P(k+1)$ の項が構成できたら、すべての $n : \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ の項を定めることができる

が成り立つようなものです。

1.5 依存型

上のようなとき、型 $P(n)$ は $n : \mathbb{N}$ に依存していますが、このような、依存した型を一般に考えることができます。これを**依存型**といいます。依存関数型 $\prod_{x:A} B(x)$ や依存組型 $\sum_{x:A} B(x)$ が存在し、これらは Curry-Howard 的には全称命題 $\forall_{x \in A} B(x)$ や存在命題 $\exists_{x \in A} B(x)$ と対応します。

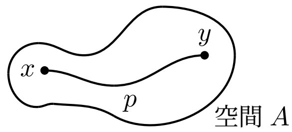
1.6 等式型

型理論において**「等しさ」**を扱うために、等式型を導入します。任意の $x, y : A$ について、等式型 $x =_A y$ が存在します。等式の反射律より、任意の $a : A$ に対して型 $a =_A a$ はつねに項 refl_a をもちます。等式型においても帰納法の考え方が適用でき、反射律はその起点となるものです。また、等式型の等式型を考えることができ、これによって、**型は高階の亜群である**と解釈できます。さらに、亜群のホモトピー論的解釈から、次の驚くべき対応が見いだされます。

1.7 型の幾何的解釈

「型と空間は同一視できる」というのが幾何的解釈です。

型理論	ホモトピー論
型 A	空間 A
項 $a : A$	A 上の点 a
等式型 $x =_A y$	x から y への経路全体
$p : x =_A y$	x から y への経路 p



2 ホモトピー型理論

以上の型理論に対し、いくつか新たに公理を追加することで、**数学そのものを基礎づけしよう**というのがホモトピー型理論 (HoTT) の目的です。

2.1 Univalance Axiom

Univalance 公理は**「ホモトピー同値な型は等しい」**という公理です。

$$(A =_{\mathcal{U}} B) \simeq (A \simeq B)$$

これによって、例えば関数の外延性など、普段の数学で成り立つことを、型理論上でも証明することができます。

2.2 進んだ話題

型理論は、証明支援系などに応用されており、**計算という行為そのものと、非常に深い繋がりがある**ことが知られています。なお、この記事は [1] をもとにして執筆しました。

参考文献

[1] Egbert Rijke. **Introduction to Homotopy Type Theory.** arXiv:2212.11082v1, 2022.