Physics Lab. 2024 数理物理班

辻圭汰

物理学におけるトポロジー

1 物理でトポロジー？

物理では空間の形を調べたくなることがよくあります。多くの場合、具体的な空間の形に興味があるわけではなく、穴が何個空いているかのような抽象的な情報だけが必要です。空間の本質的な情報を提供してくれるのがトポロジーです。このポスターでは基本群というトポロジーの道具とその応用を物理における応用を紹介します。

2 基本群

空間の情報をループの連続的な変形によって調べるのが**基本群**です。ループとは始点と終点が同じであるような空間の中の経路のことです。

2 つのループが空間の中で始点と終点を動かさずに連続的に変形して移りあえるとき、その 2 つのループは**ホモトピック**であると言います。例えば次の図の四角形の中の 2 つのループはホモトピックです。実際、青いループを赤いループに連続的に縮めることができます。

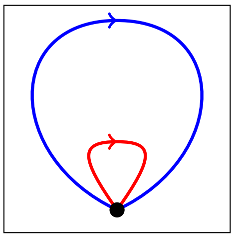

図 1: 連続的に変形できる 2 つのループ

一方、四角形の真ん中に穴が開いている場合、2 つのループはホモトピックではありません。変形しようとしても穴につっかえてしまうからです。

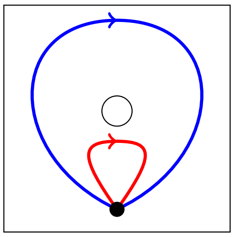

図 2: 連続的に変形できない 2 つのループ

このような穴の開いた四角形では、ホモトピックなループの種類は時計回りに穴を回った回数で分類できます。ホモトピックなループの種類を**ホモトピー類**と呼び、ホモトピー類の全体の集合を**基本群**と呼びます。また図形 X の基本群を $\pi_1(X)$ と書きます。

$$\pi_1(\text{穴の開いた四角形}) \cong \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

このとき穴の周りを 3 回回って、さらに 2 回回ると、全体として 5 回回ったことになります。2 つのループを続けて行って別のループを作るという操作が、基本群においては回った回数の足し算に対応しているわけです。これは数学的には、基本群は群であるということを表しています。

3 ディラックのベルト

回転という操作は身近ですが、すべての回転を集めた空間 (**回転群** SO(3) という) の形がどうなっているかと言われるとちょっと難しい気がします。

しかしトポロジーを使えば回転群の基本群を求めることができます。結果は驚くべきもので、実は回転群のホモトピー類は何もしないループとホモトピックなものと、360 度回転にホモトピックなものしか 2 つしかありません。特に、720 度回転は回転しないループとホモトピックです。

回転群におけるループは、ベルトによって直感的に表すことができます。ベルトの表面に 3 つの軸を取れば、ベルトを曲げたとき表面の軸が回転します。ベルトの両端が上を向くようにすれば、それが回転群のループを表すことになります。このトリックはディラックのベルトと呼ばれており、解説動画が [1] にあります。

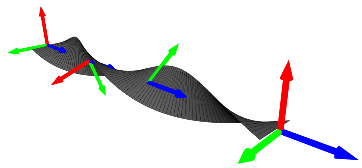

図 3: 360 度ひねったベルトと回転群のループ

ベルトを 360 度ひねると両端を動かさずに元に戻すことはできませんが、**720 度ひねった場合は両端を動かさずに元に戻すことができます！**これは 720 度回転が何もしないループとホモトピックであるということです。

この事実には非常に重要な物理的意味があります。それは微小な回転で変化する量は、720 度回転で最初の状態に戻る必要があるが、360 度回転では最初の状態に戻らなくてもよいということです。そのような量は実際に存在し、**スピノル**と呼ばれています。物質を構成する電子や陽子、中性子などの粒子はスピノルで表されます。

参考文献

[1] Noah Miller. Dirac's belt trick, topology, and spin particles. 2021. https://www.youtube.com/watch?v=ACZC_XEyg9U.