

# 量子場の導入 —場の量子論の基本原則から考える—

## 1 導入

粒子の生成・消滅を伴う物理現象を記述するために、場の量子論という枠組みが用いられています。このポスターでは、粒子の生成・消滅を扱う理論が満たすべきいくつかの重要な要請を示した後、量子化された場を導入することによって、それらが自然に満たされることを概観します。

## 2 基本原理

### 2.1 量子力学と特殊相対論

場の量子論は量子力学と特殊相対性理論が主な2つの柱となって構築されている理論です。歴史的に、これら2つの理論はそれぞれ独自に発展しました。しかし、量子力学はそのままでは相対論と相性が悪く\*1、更に粒子数が保存される現象しか扱うことができないため、粒子の生成・消滅を扱うには理論として不十分です。そこでこれら2つを矛盾しないように融合させる必要があります。

今スタートラインとして量子力学を認めると、特殊相対論からは「どの慣性系から見ても物理現象は変わらない」という理論のローレンツ共変性 (i) と、一粒子状態のローレンツ変換性がローレンツ群の表現に従う (ii) ことが課せられます。

### 2.2 クラスタ分解原理

#### 2.2.1 S 行列

遠方から飛んできた多粒子が近づき、相互作用をして遠方に散乱していく状況を考えます。このとき入射する粒子と出てくる粒子の数は一般に異

なっています。入射する粒子と散乱を経て十分経過した粒子の間の遷移振幅を行列にしたものを S 行列と呼びます。相互作用している最中の状態の詳細に立ち入らずとも、S 行列を考えることによって、遷移の確率分布や散乱断面積など、粒子の生成・消滅を考える際に必要な物理量を求めることができます。

#### 2.2.2 クラスタ分解原理

ある散乱現象を考えます。もし散乱している粒子が他の遠く離れた粒子に瞬間的に影響を与えるとすると、光速を超えて情報が伝達されたことになってしまうため、物理的には禁じられます。このことを S 行列を用いて表現すると「空間的に離れた粒子を含む状態の間の S 行列要素は 0 になる」となり、これをクラスタ分解原理 (iii) と呼びます。これは (物理学における) 因果律の一つの定式化となっています。

## 3 生成・消滅演算子

状態に作用して、粒子を一つ作る演算子と消す演算子を導入します。それぞれ生成演算子、消滅演算子と呼びます。自由粒子状態  $|q_1, q_2, \dots, q_N\rangle$  は真空  $|0\rangle$  に

$$\begin{aligned} a^\dagger(q_1)a^\dagger(q_2)\cdots a^\dagger(q_N)|0\rangle \\ = |q_1, q_2, \dots, q_N\rangle \end{aligned}$$

と各々の粒子に対応する生成演算子を作用させて得られます ( $q_i$  は一粒子を規定する添字とします)。この表式と状態のローレンツ変換性から生成及び消滅演算子の変換性が求まります。

## 4 場

任意の演算子は生成・消滅演算子によって展開できることが知られています。全ハミルトニアンを展開することで、展開係数が「3 次元運動量保存デルタ関数を一つだけ含むならばクラスタ分解原理を満たす」という定理 (\*) が示せます。またハミルトニアン

$$V(t) = \int \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) d^3x$$

とかけていけば、S 行列のローレンツ不変性を満たすことが示せます\*2。そこで、ハミルトニアン密度  $\mathcal{H}$  を

$$\psi_l^+(x) \equiv \sum_q \int d^3p u_l(x, q) a(q) \quad (1)$$

$$\psi_l^-(x) \equiv \sum_q \int d^3p v_l(x, q) a^\dagger(q) \quad (2)$$

で定義された  $\psi_l^\pm$  を用いて展開すると、定理 (\*) の仮定が満たされ、ローレンツ不変でクラスタ分解原理を満たす S 行列が構成されます。このとき、係数  $u, v$  を (1)(2) がローレンツ群の既約表現に従って変換するように取ることができます。(1) を消滅場、(2) を生成場と言い、ともに (ii) から要請される変換性を満たします。かくして、2. 基本原理で挙げた要請 (i)(ii)(iii) が場の導入によって自然に満たされることが分かりました。

## 5 最後に

量子場を考える際の“気持ち”が伝われば幸いです。本解説は参考文献 [1] の流れを大いに参考にしているため、ぜひご参照ください。

## 参考文献

- [1] S. Weinberg. 場の量子論 (1 巻) 粒子と量子場. 吉岡誠, 1997.

\*1 たとえばシュレーディンガー方程式はローレンツ変換に対して共変ではありません。

\*2 一般に相互作用項がこのようにかけることは S 行列がローレンツ不変であるための必要条件とは限りませんが、広いクラスで相互作用はこの形にかけることが知られています。