

時間順序とミンコフスキー錐

1 順序と錐

1.1 順序

「順序関係」は数学的には以下のよう
に定式化できます。

- (1) $x \preceq x$
- (2) $x \preceq y$ かつ $y \preceq z \implies x \preceq z$
- (3) $x \preceq y$ かつ $y \preceq x \implies x = y$
- (4) $x \preceq y$ または $y \preceq x$

(1) ~ (4) を全て満たす \preceq を**全順序**、
(1) ~ (3) を満たすものを**半順序**、
(1) と (2) だけを満たすものを**前順序**
といます。ベクトル空間 V 上の
半順序で

- (i) $x \preceq y, v \in V$
 $\implies x + v \preceq y + v$
- (ii) $x \preceq y, \lambda \geq 0 \implies \lambda x \preceq \lambda y$

を満たすものを**ベクトル半順序**とい
います。同様に (i) と (ii) を満たす前順
序を**ベクトル前順序**といます。

1.2 錐

集合 C が

$$x \in C, \lambda \geq 0 \implies \lambda x \in C$$

を満たすとき**錐**といます。これは底
面が無く無限に伸びた三角錐や円錐の
一般化になっています。

$$x, y \in C, 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\implies \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$$

を満たす集合 C を**凸集合**といます。
これは内分点が必ず含まれるような集
合を表します。凸集合でもあるような
錐を**凸錐**といます。

$$x \in C \text{ かつ } -x \in C \implies x = 0$$

を満たす錐 C を**尖錐**といます。

1.3 順序と錐の関係

実は、ベクトル前順序と凸錐、ベク
トル半順序と尖凸錐には一対一の対応
関係があります。

定理 1. ベクトル前順序 \preceq に対し

$$C := \{x \in V \mid 0 \preceq x\}$$

と定めると C は凸錐となる。さらに、
 \preceq が半順序なら C は尖である。

定理 2. 凸錐 C に対し、

$$x \preceq y \stackrel{\text{def}}{\iff} y - x \in C$$

と定めると \preceq はベクトル前順序とな
る。さらに、 C が尖なら \preceq は半順序
となる。

2 時間順序とミンコフスキー錐

いくつかの事象の間の**因果関係**を考
えたい時には、それらの事象が起こっ
た時刻と位置が問題となります。時空
上の点 x と y で起こる 2 つの事象の
間に因果関係があり得るとき、 x と y
の間に「**絶対的な時間的順序関係**」が
あるといえます。

y から見て x が絶対的な過去にあ
ることを $x \preceq y$ と書くことにすると、
 \preceq は前順序となるべきだと考えられま
す。なぜなら、 x で起こる事象は自分
自身と因果関係にあるとって構わない
ので (1) は成り立ち、 x より y が絶
対的な未来にあって y より z が絶対
的な未来にあるなら x より z は絶対
的な未来にあるからです。

さらに、時空の並進対称性を考える
と、「絶対的な時間的順序関係」の判
定基準は時空上の位置によるべきでな
いので (i) も成り立つと考えられます。

また、0 より x が絶対的な過去にある
とき、0 から x まで等速直線運動する
粒子を考えると $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して
 λx で起こる事象は 0 で起こる事象と
因果関係にありえると考えられます。
これと (i)(2) と合わせれば (ii) も成り
立つはずだとわかります。

つまり、時間順序 \preceq はベクトル前
順序であると考えられます。すると、
前節で見たことから時間順序は凸錐に
よって定まるものである、ということが
わかります。

空間回転対称性を合わせれば、時間
順序は下図の 3 種類のいずれかの凸錐
によって定まることがわかります。

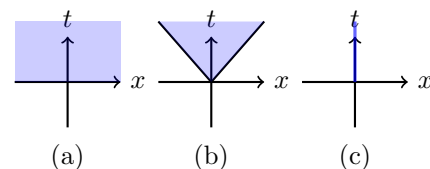


図 1: 時間順序錐

ベクトル全順序なら (c)、全順序では
ないがベクトル半順序なら (b)、半順
序ではないがベクトル前順序なら (a)
の錐になります。(a) の錐 (**ガリレイ
錐**) が与える時間順序は、大域的に同
じ時間が流れる古典力学的なもので、
(c) は全ての空間の点が完全に独立し
異なる場所には一切の因果関係がない
(非物理的な) ものです。(b) は特殊相
対論で使われる**ミンコフスキー錐**で、
この場合等速直線運動する粒子によ
って情報が運ばれる状況を考えれば、速
さに何らかの上限があることがわか
ります。

つまり、大域的な時間順序は古典力
学的なものか特殊相対論的なものしか
ないことがわかります。