

超準解析による「無限」の数学

1 超準解析とは

実数の世界に無限小、無限大の数はありませんが、数学や物理学では“無限”小量を使って $dy = ydx$ のように微積分を記述することがあります（実際は極限で厳密化できます）。しかし実数を「拡大」して無限小数や無限大数を得ることで上のような記述を直接正当化することができます。これが超準解析です。

ここでは厳密さよりも直観を優先しますが、実際の超準解析にご興味であれば、[1, 2]などを参照して深淵な論理と解析との世界に飛び込んでみてください。

2 超実数について

2.1 実数から超実数へ

全ての実数の数列から成る集合に「十分多くの番号で値が一致している2つの数列は同一視する」と約束します。例えば有限個の $n \in \mathbb{N}$ でのみ値が異なる2つの数列は同一視されます。これで類別された集合を**超実数**全体の集合と呼び、 ${}^*\mathbb{R}$ と記します。通常の実数 $r \in \mathbb{R}$ は数列 (r, r, \dots) の類に属するような ${}^*\mathbb{R}$ の元である、と解釈します。

2.2 「宇宙」と移行原理と

実数以外の、数列や関数のような集合も「超準」の世界に移行しなければなりません。厳密な定義は複雑なので、

要点のみ述べます。

通常の解析学で現れる全ての集合を要素に持つ、解析学の「宇宙」と呼べる集合（**上部構造**） $U(\mathbb{R})$ を構成できます。同様にして超準解析の上部構造 $U({}^*\mathbb{R})$ も得られます。そして**スター写像** $*$: $U(\mathbb{R}) \rightarrow U({}^*\mathbb{R})$ を構成できて、これが通常の世界から超準の世界への移行を担います。

スター写像は通常の世界を「保つ」ています：

定理 1 (移行原理). 通常の世界の命題と、その命題に現れる全ての通常の世界の集合をスター写像で送った超準の世界の命題と、は同値である。

これにより、「超実数体 ${}^*\mathbb{R}$ は体である（加減乗除ができる）」 ${}^*\mathbb{R}$ には大小比較の順序がある」という実数体の基本性質が超実数体に引き継がれます。

2.3 無限小数、無限大数

「超実数の中なら正常な順序がある」という性質は移行原理で保証されますが、実数ではある超実数に勝てないことがあります。例えば超実数 $(1, 2, \dots, n, \dots)$ は、どんな実数 $r = (r, r, \dots)$ よりも大きいです。その逆数 $(1, 1/2, \dots, 1/n, \dots)$ はどんな正の実数よりも小さいです。

さて、通常の世界では「どんな実数を持ってきても、それより大きい実数は存在する」という命題が真で、「ある実数が存在して、それはどんな実数よりも大きい」という命題が偽です。しかし上に見たように「ある**超実数**が存

在して、それはどんな**実数**よりも大きい」というのは真です。このように超準の世界では「全ての」の後ろにある「ある」をある意味で前に出せます*1。

2.4 無限小解析の実現例

点 $a \in \mathbb{R}$ で微分可能な関数 f をスター写像で超準の世界に送ると、非0の無限小超実数 dx をとったときに

$$\frac{{}^*f(a+dx) - {}^*f(a)}{dx}$$

は微係数 $f'(a)$ に無限小の精度で一致します。また無限大超自然数 N をとると、リーマン積分は

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \sum_{n=1}^N {}^*f\left(\frac{n}{N}\right) \cdot \frac{1}{N}$$

のように書けます*2。

3 応用例: 経路積分

時空間を「無限小」の間隔で離散格子化するとファインマン経路積分がただの足し算で実現できます。それで得られた関数を通常の世界に戻すと、2次元時空であれば実際にディラック方程式の解となります。またこの足し算過程を戻し、通常の世界での経路測度を得ることもできます*3。

参考文献

- [1] 中村徹. **超準解析と物理学** (増補改訂版). 日本評論社, 2017.
- [2] 齋藤正彦. **超積と超準解析** (増補新版). 東京図書, 1987.

*1 これは難しいですが「拡大化定理」や「飽和定理」という定式化、証明がなされていて、移行原理と並んで超準解析の根幹を成しています。

*2 ただしこの和は非可算個の元の足し算で、扱いにはやや注意が必要となります。

*3 4次元時空でも超準世界での経路積分（ただの足し算）はできますが、無限大数が現れて通常の世界に戻すときに問題が生じます。