

超弦理論の第一歩

1 なぜ弦理論

現代の物理学では17個の素粒子を用いた標準模型というもので物質や力が記述される。しかし物理学はこれで完成したとは言えない。1つは理論の中に**無限大**が出てきてしまうという問題である*1。2つ目は**重力**を記述できないということである*2。

それに対して弦理論は輪のように端が繋がった閉じた弦が重力を、開いた弦が電磁気力などを表すことが分かっている。また弦理論にて3次元空間で計算すると確率が負となるような問題が起きるが、条件によって9次元だと矛盾がなくなる。これはこの世界が何次元でできているかを予言しているのではなからうか。

2 超弦理論

2.1 古典弦理論

現代物理学は速さが速い時や重力が強い時に時間と空間が混ざり合うという**相対論**と、小さなものを記述する**量子論**の2大柱からできている。まずは量子論はあと回しにして弦の運動を考えてみるのが古典弦理論である。自然界はなぜか作用 S というものが最小になるようにできている*3。 $(D+1)$ 次元時空を動く弦を考える。その軌跡は面となり、弦理論での作用 S はその面の面積であると考えられる [1]。

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2}$$

*1 電子陽電子対生成、対消滅の際の電子間力など。

*2 他の力は無限大の問題を別の無限大で打ち消すというくりこみを行っているが、重力には適用できず無限大の問題を解決できない。

*3 いろんな現象も S の形を変えて S が最小になっていることを考えると説明できるというものは実に面白い。自然界は最小を知っているのだろうか。

*4 光錐ゲージやディレクレ条件という開弦の自由端境界条件。

*5 解析接続 $1+2+3+\dots = -\frac{1}{12}$ を用いた。

この S にいくつかの条件*4を加えた上で、最小になる条件を考えると

$$X^\mu = x_0^\mu + 2\alpha' a_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} (a_n^\mu e^{-in\tau} - a_n^{\mu\dagger} e^{in\tau}) \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}}$$

となる。

2.2 量子化

さて今までの理論は量子論の効果が入っていないのであった。量子力学では状態 $|\psi\rangle$ を考える。そして位置 x と運動量 p が演算子として状態 $|\psi\rangle$ に作用するものになる。また、その積が順番によって変わりその差が $i\hbar$ となるのである。すなわち $[x, p] = xp - px = i\hbar$ 。この条件を弦理論に課すと、 $a_n^I, a_n^{J\dagger}$ は $[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}$ という関係式を持つ**生成消滅演算子**という演算子になる。 $a_n^{J\dagger}$ は X^I 方向の n 倍振動子を1つ生成させ、 a_n^I は X^I 方向の n 倍振動子を1つ消滅させる演算子となり、さまざまな状態が $a_m^I, a_n^{J\dagger}$ と真空状態 $|0\rangle$ で表せるようになる。

2.3 超対称性

ここまでの話は弦理論であり、それに超対称性という対称性を課す。それが超弦理論である。粒子にはボソンとフェルミオンという2種類があり、フェルミオンの弦はグラスマン数で示される方向に振動する。グラスマン数は2乗すると0となり、パウリの排他律に対応する。超対称性というのは、普通の数とグラスマン数の座標軸の間

の回転対称性のことで、ボソンとフェルミオンの移り変わりに対する対称性のことである。フェルミオンの生成消滅演算子を $b_r^I (r = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots)$ とする。

2.4 余剰次元

相対論の要請を加えた上で、光子の質量=0を考えると

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I + \sum_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} r b_{-r}^{I\dagger} b_r^I \right) = 0$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{D-1}{2} (1+2+3+\dots + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \dots) = 0$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{D-1}{16} = 0$$

$$D = 9$$

となり*5空間は9次元となる。これは私たちが感じている3次元空間のほかに6次元分の異次元が隠れているというものである。それはちょうど、細い棒は一見1次元に見えるがよく見みると円周方向にもう1次元隠れていることに対応している。

参考文献

- [1] B. ツヴィーバハ。初級講座弦理論基礎編。丸善プラネット, 2019。