Physics Lab. 2024 数理物理班　辻圭汰

結び目とチャーン・サイモンズ理論

1　結び目

3 次元空間に浮かんでいる 1 つの輪っか[*1]のことを**結び目**と呼びます。複数の輪っかがあるときは**絡み目**と呼びます。

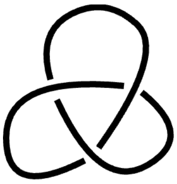

図 1: 三葉結び目

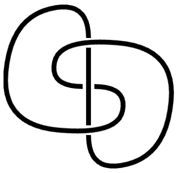

図 2: 三葉結び目と同値な結び目

結び目は切ったり自分自身と重なったりしないように変形することができます。互いに変形し合うことができる結び目は**同値**であると言います。

例えば図 1 と図 2 の結び目は実は同値であり、互いに変形し合うことができます。

2　ジョーンズ多項式

結び目が同値かどうかを判定するのは実は困難です。図 1 の結び目と図 2 の結び目が同値であることは図をちょっと見ただけでは分からないでしょう。また図 1 の結び目は、その鏡像と同値ではありません。

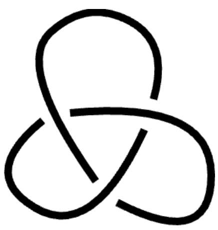

図 3: 三葉結び目の鏡像、こちらは左手型と呼ばれる。

結び目が同値かどうか判定するのに便利な量が**結び目不変量**です。結び目不変量とは、2 つの結び目が同値なら同じ値を取る量のことです[*2]。

結び目不変量の一例に**ジョーンズ多項式**というものがあり、次のように計算できます。まず結び目に向きをつけ[*3]、ただの輪っか (自明な結び目) には 1 という式を対応させます。

図 4: 交点の変形

次に、1 つの交点を図のように変えた結び目をそれぞれ L_+, L_-, L_0 としたとき、**スケイン関係式**

$$
\begin{aligned}
&t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) \\
&= (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0)
\end{aligned}
$$

が成り立つように t の多項式 $V(L_+), V(L_-), V(L_0)$ を対応させます[*4]。

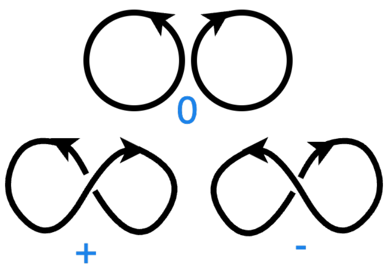

図 5: 2 つの自明な結び目から成る絡み目のジョーンズ多項式

例えば 2 つの自明な結び目から成る絡み目は図 5 のように 1 つの自明な結び目に変形できます。そこでジョーンズ多項式は $-t^{1/2} - t^{-1/2}$ と計算できます。

図 1 の三葉結び目のジョーンズ多項式は $-t^4 + t^3 + t$ と計算できるのに対し、図 3 の左手型の三葉結び目では $-t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$ となります。よって、結び目不変量が違うのでこれらの結び目は同値ではありません。

3　場の量子論との関係

実は、ジョーンズ多項式は**チャーン・サイモンズ理論**と呼ばれる位相的場の量子論を使って計算することができます。チャーン・サイモンズ理論は 3 次元多様体 M で定義される作用が

$$
S = \frac{k}{4\pi} \int_M \mathrm{Tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)
$$

であるような場の量子論で、A はリー代数に値を取る 1 次微分形式です。

ウィッテンは [1] において、結び目 L に沿って**ウィルソンループ**という物理量

$$
W_L = \mathrm{Tr}\left(P \exp\left(i \oint_L A \right) \right)
$$

の真空期待値を計算するとジョーンズ多項式が得られることを示しました。チャーン・サイモンズ理論を少し変えれば様々な結び目不変量を得ることができます。

参考文献

[1] E. Witten. “Quantum field theory and the Jones polynomial” Communications in Mathematical Physics **121**.3 (1989) : 351 – 399.

[*1] 正確には、S^1 の $\mathbb{R}^3$ への埋め込み。
[*2] ただし、同値でない結び目が偶然同じ値を取ることはあってもよい。そのような場合がなければ、その結び目不変量は完全であるという。
[*3] 結び目の向きの付け方によってジョーンズ多項式は変わらないことが知られている。ただし絡み目の場合、相対的な向きの付け方には依存しうる。
[*4] $t^{1/2}, t^{-1/2}$ のような項も許す。ジョーンズ多項式は必ず整数係数になることが知られている。