Physics Lab. 2024 量子班

梅川 舜

一般確率論

1 一般確率論とは

量子論では各「状態」における物理量の値は「測定」してはじめてわかり、確率的にしか予言できないことがわかりました。

一般確率論は古典論や量子論を含むより一般の理論で、「**状態**」や「**測定**」に対する物理的要請から出発します。

2 状態

一般確率論では**状態空間**は（コンパクトな）**凸集合** S によって記述されます。凸集合とは内分点が必ず入る

$$p\in[0,1],\ x,y\in S \Rightarrow px+(1-p)y\in S$$

集合のことで、状態の確率混合ができることに対応します。つまり、状態 x と状態 y があるなら、「確率 p で状態 x にあり確率 $1-p$ で状態 y にあるような状態」も存在する、ということです。

2.1 純粋状態

純粋状態は状態空間 S の**端点**として記述されます。凸集合の端点とは、

$$\begin{aligned}&p\in(0,1),\ x_1,x_2\in S\\&px_1+(1-p)x_2=x \implies x_1=x_2=x\end{aligned}$$

を満たすような点 x のことで、他のどんな状態の確率混合としてもかけないような状態を意味します。**クレイン-ミルマンの定理**

$$\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(S))}=S \qquad (1)$$

($\mathrm{conv}(X)$ は X を含む最小の凸集合、$\mathrm{ext}(X)$ は X の端点の全体を表します。）により全ての状態は純粋状態の確率混合としてかけることがわかっています。

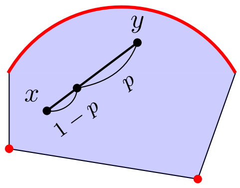

図 1: 凸集合（青）と端点（赤）

2.2 古典系

全ての状態が純粋状態の確率混合として一意的に書けるような系を**古典系**と言います。数学的にはこれは状態空間が**単体**であるということになります。例えば線分や三角形や四面体は単体ですが、四角形は単体ではありません。

3 測定

事象（2 値測定）は状態空間 S から $[0,1]$ への**アフィン写像**として記述されます。アフィン写像とは凸結合を保つ

$$f(px+(1-p)y)=pf(x)+(1-p)f(y)$$

写像のことで、状態の確率混合について整合的であることを意味します。つまり、状態 x で確率 p_x で起こり状態 y で確率 p_y で起こるような事象は、状態 $px+(1-p)y$ では確率 $pp_x+(1-p)p_y$ で起こるということです。

絶対に起きる事象 $1_S : x\mapsto 1$ を**恒等事象**と言います。一般に **n 値測定**は和が恒等事象になる事象の組 $\{e_i\}_i$ ($\sum_i e_i = 1_S$) によって記述されます。

4 合成系とエンタングルメント

量子論では空間的に離れた 2 つの系の間に非自明な相関があるという**エンタングルメント**というものが知られています。一般確率論では実は 2 つの系 S と T の**合成系**の状態空間 $S\tilde{\otimes}T$ の定め方は一意ではないのですが、非古典系で一般にエンタングル状態が存在しうることがわかっています。

5 状態変化

一般に、ほぼ全ての**操作**は 2 つの状態空間の間のアフィン写像として書けます。例えば、**状態変化**は状態空間 S から S 自身へのアフィン写像として記述されますし、n 値測定は S から古典 n 準位系へのアフィン写像としても記述できます。測定結果に応じて状態変化するような場合も S から S と古典 n 準位系の合成系へのアフィン写像で記述できます。

6 両立不可能性

2 つの操作 $f:S\to F$ と $g:S\to G$ が**両立可能**であることは、$(\mathrm{id}_F\otimes 1_G)\circ\Psi=f$ と $(1_F\otimes\mathrm{id}_G)\circ\Psi=g$ を満たす操作 $\Psi:S\to F\tilde{\otimes}G$ が存在することとして記述できます。ここで id_S は**自明な操作** $\mathrm{id}_S : x\mapsto x$ です。

これを用いると、非古典系で一般に**両立不可能な測定**が存在することや、状態のコピーを作ることができるのは古典系だけであること（**複製禁止定理**）などが証明できます。

参考文献

[1] M. Plávala, “General probabilistic theories: An introduction”, *Phys. Rep.* **1033** 1 (2023)