Physics Lab. 2024 量子班

梅川 舜

時間とエネルギーの不確定性関係

1 不確定性関係

量子論においては、２つの物理量の値が同時に一定精度で確定できないという**不確定性関係**があります。

不確定性関係の一番簡単な定式化としては**ロバートソン-ケナードの不等式**

$$\sigma_\rho(A)\sigma_\rho(B) \geq \frac{|\langle[A,B]\rangle_\rho|}{2}$$

があります。ここで $\langle X\rangle_\rho$, $\sigma_\rho(X)$ はそれぞれ状態 ρ における物理量 X の期待値と標準偏差で、$[A,B]=AB-BA$ は交換子です。例えば位置 x と運動量 p については、$[x,p]=i\hbar$ なので

$$\sigma_\rho(x)\sigma_\rho(p) \geq \frac{\hbar}{2}$$

となります。この不等式は内在的な**量子ゆらぎ**についての不等式ですが、他にも**測定誤差**や**擾乱**についての不等式も提唱されています。

2 時間とエネルギーの不確定性関係

相対論や解析力学における「位置と運動量の関係」と「時間とエネルギーの関係」の類似性から、時間とエネルギーにも同様の「不確定性関係」が存在することが期待されます。

しかし、量子論では位置や運動量などの物理量は通常状態空間上のエルミート演算子として表されますが、時間 t は単なるパラメータなので、異なる取扱いが必要となります。実際、ハミルトニアン H と正準交換関係 $[T,H]=i\hbar$ にある演算子 T が存在すると、

$$He^{i\epsilon T/\hbar} = e^{i\epsilon T/\hbar}(H-\epsilon) \qquad (1)$$

となり、エネルギーに下限がなくなり不安定になることがわかります。

3 推定理論による定式化

一つの定式化の方法は直接測定できるような物理量でないものの値の**推定**によるものです。

3.1 量子フィッシャー情報量による推定

状態をラベルするパラメータ θ を物理量 A の測定結果から推定することを考えます。期待値については正しい**不偏推定**の精度は、**量子フィッシャー情報量**

$$S = \mathrm{tr}[L_\theta^\dagger \rho_\theta L_\theta],\ \left(\frac{\partial\rho_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{2}(\rho_\theta L_\theta + L_\theta^\dagger\rho_\theta)\right)$$

を用いて量子クラメールラオ不等式

$$\sigma(\theta_{\mathrm{est}}) \geq \frac{1}{\sqrt{S}}$$

で与えられます。時間発展している状態 $\rho_t = e^{-iHt/\hbar}\rho e^{iHt/\hbar}$ の場合には、この不等式は

$$\sigma(t_{\mathrm{est}})\sigma_{\rho_t}(H) \geq \frac{\hbar}{2}$$

となります。

3.2 弱値による近似

物理量 A の関数としてハミルトニアンと時間を近似することを考えます。時刻 t_0 の付近では期待値が正しい局所不偏推定の場合には近似の精度が

$$\|H - f(A)\|\|t_0 - g(A)\| \geq \frac{\hbar}{2}$$

となり、その最適な近似関数がハミルトニアンの**アハラノフ弱値**

$$H_w(a) = \frac{\langle a|\,H\,|\psi\rangle}{\langle a|\psi\rangle}$$

の実部と虚部を用いて

$$f(a) = \mathrm{Re}H_w(a)$$

$$g(a) = t_0 + \frac{\hbar}{2}\frac{\mathrm{Im}H_w(a)}{\|\mathrm{Im}H_w(A)\|^2}$$

と与えられることがわかります。

4 時間作用素による定式化

もう一つの方法として形式的な**時間作用素**を定める方法があります。無限次元での厳密な議論によると、演算子の「エルミート性」や「正準交換関係」にはいくつかの強さの異なるクラスがあります。

自己共役 $\Longrightarrow$ **対称** $\Longrightarrow$ **エルミート**

ワイル関係

$$[e^{iuT}, e^{ivH}] = e^{-iuv\hbar}e^{ivH}e^{iuT}$$

⇒**弱ワイル関係**

$$Te^{-iHt/\hbar} = e^{-iHt/\hbar}(T+t)$$

⇒**正準交換関係** $[T,H]=i\hbar$

そのため、やや弱いクラスの条件を満たす時間作用素であれば作ることができる場合があります。

例えば、$H=\frac{p^2}{2m}$ で記述される**自由粒子**の場合には

$$T = \frac{m}{2}(xp^{-1} + p^{-1}x)$$

の定義域をうまく定めてやれば、**アハラノフ-ボーム時間作要素**という弱ワイル関係を満たす対称作用素となります。

参考文献

[1] 沙川貴大, 上田正仁, “量子測定と量子制御”, サイエンス社 (2015)

[2] J. Lee and I. Tsutsui, “Uncertainty relations for approximation and estimation”, *Phys. Lett. A* **380(24)**, 2045 (2016)

[3] A. Arai, “Mathematical Theory of Time Operators in Quantum Physics” 数理解析研究所講究録 第 1609 巻 24 (2008)