Physics Lab. 2024 量子班

聞 駿軒

高校生のための量子論の基礎

1　はじめに

このポスターでは、最低限の高校数学を前提知識として量子論を学んだことがない方に、量子論がどのような枠組みなのかを数学的な形式をメインに解説し、そこに反映される量子論の特徴を説明します。量子論の物理としての意味を解説したポスターもあるので併せてご覧ください。

2　線形代数

2.1　ベクトルと基底

基底とは、それらを足し合わせることで任意のベクトルを作ることができる必要十分なベクトルの組です。n 次元のベクトル空間において基底は一次独立な n 個のベクトルです。基底の長さがすべて 1 で各々が直交しているとき、正規直交基底といいます。ベクトルは基底が定まっているとき、$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と表されます。${}^t\vec{v} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を $\vec{v}$ の転置といいます。

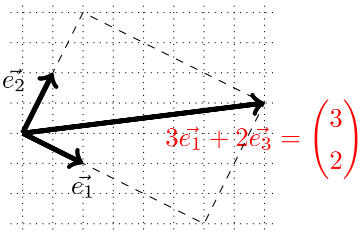

図 1: $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ を基底としたときのベクトル $\vec{v}$ の表示

2.2　行列と線形写像

線型写像とは、以下の性質を満たす、ベクトルをベクトルに移すような関数 f です。

1. $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$
2. $f(a\vec{x}_1) = af(\vec{x}_1)$

線形写像は基底の行き先だけ指定すればすべてのベクトルの行き先が決まるので、基底の行き先を横に並べた行列を A として、$f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と書きます。すなわち、

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, f(\vec{e}_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

として、A は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と表され、行列とベクトルの積 $A\vec{x}$ は次のように計算できます。

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

また、他の行列 B が

$$B = \begin{pmatrix} \vec{b_1} & \vec{b_2} & \cdots & \vec{b_n} \end{pmatrix}$$

のように表されるとき、A と B の積を

$$AB = \begin{pmatrix} A\vec{b_1} & A\vec{b_2} & \cdots & A\vec{b_n} \end{pmatrix}$$

のように定義することで、$A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$ となり、線型写像の合成が整合的に計算できます。

2.3　固有値

$A\vec{x} = \alpha\vec{x}$ を満たす α と $\vec{x}$ が存在するとき、α を固有値、$\vec{x}$ を固有ベクトルといいます。

3　量子論の基礎

量子論は線形代数を用いて記述されます。量子論の理論は以下の前提から出発します。

- 物理量はある条件[*1]を満たす複素数の行列で表される。
- 物理量の測定値はその行列の固有値のいずれかとなる。
- 系の状態[*2]は複素数のベクトルで表される。
- 系の状態を物理量の固有ベクトルからなる正規直交基底で表したとき、ある値 α をとる確率は、それに対応するベクトルの成分の絶対値の二乗で表される。

量子論は従来の物理学と違って、「物理量の測定値はその確率しかわからない」、「状態の重ね合わせができる[*3]」などの特徴を持っています。これらをうまく表現することができる数学的枠組みが、線形代数なのです。

参考文献

[1]　清水明.『新版 量子論の基礎』. サイエンス社 (2004).

[*1] 行列を転置して複素共役をとったものが、元の行列と一致する行列が物理量を表します。このような行列はエルミート行列と呼ばれます。これは、物理量の測定値が実数であることや、固有ベクトルが直交することを保証するためにあります。
[*2] 純粋状態のこと
[*3] これは、単なる確率混合ではなく、重ね合わせた後も純粋状態であることが従来の物理学と異なる点です。