Physics Lab. 2024 量子班 家安将太郎

量子論のマクスウェル方程式

1 古典論のマクスウェル方程式

マクスウェル方程式とは、以下の連立偏微分方程式のことです。

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho,\ \ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \\ \nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \\ \nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{1}$$

これを演繹的に導くには次のようにします。まず基本変数としてゲージ場 $A^\mu=(A^0,\boldsymbol{A})$ をとります。このゲージ場は電場・磁場と以下のような関係にあります。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}&=-\nabla A^0-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{B}&=\nabla\times\boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{2}$$

次にラグランジアン $\mathcal{L}$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}&=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-A^\mu j_\mu \\ F^{\mu\nu}&=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu \end{aligned}$$

とします。そうすれば最小作用の原理から

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}+j^\nu=0 \tag{3}$$

が導けます。式 (2) と (3) とはマクスウェル方程式 (1) を再現しています。このようにして、マクスウェル方程式を導出することができました。

2 量子論のマクスウェル方程式

2.1 ラグランジアン

上の議論を量子論でやりましょう。出発点となるラグランジアンは以下の通りです。

$$\mathcal{L}_{\rm q}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-A^\mu j_\mu-\partial^\mu B\cdot A_\mu+\frac{\alpha}{2}B^2$$

古典系を量子化するときふつうは、ハミルトニアンを出して正準交換関係を課す、というふうにやるのですが今回は素直にはそれができません。そこで B という新たな場 (補助場) を追加してそれができるようにしました。最小作用の原理を用いて運動方程式を求めると以下のようになっていることがわかります。

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\nu\mu}+j^\mu=\partial^\mu B \\ \Box B=0 \end{aligned} \tag{4}$$

式 (4) の 2 つ目の式は解くことができて、B は以下のようになります。

$$B=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}}\int d^3\boldsymbol{k}\,(B(\boldsymbol{k})e^{-ikx}+B^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx})$$

これらの情報を用いればこの系の性質は全て求まるように思えますが、実はそうではありません。

2.2 物理的状態を選び出す補助条件

何が問題かというと、$\mathcal{L}_{\rm q}$ の定める状態空間 $\mathcal{V}$ が広すぎて、明らかに非物理的な状態も含んでしまっていることです。例えば $\mathcal{V}$ の中には存在確率が負の粒子なども含まれています。そういうわけで，$\mathcal{V}$ の中のどの元が物理的状態を表していて、どの元がそうでないかということを判定する基準があると便利です。実は、以下の式がその基準を与えることが知られています。

$$[\forall\boldsymbol{k},\quad B(\boldsymbol{k})\,|\alpha\rangle=0]\Leftrightarrow|\alpha\rangle\in\mathcal{V}_{\rm phys} \tag{5}$$

式 (5) によって適切な物理的状態空間が定まり、現実に即した議論ができるようになります。

2.3 量子論のマクスウェル方程式

上で導入した補助条件とそれと双対な式 $\langle\alpha|\,B^\dagger(\boldsymbol{k})=0$、さらに運動方程式とから量子論でのマクスウェル方程式が以下のように求まります。

$$\langle\alpha'|\,\partial_\mu F^{\mu\nu}+j^\nu\,|\alpha\rangle=0 \tag{6}$$

古典論のマクスウェル方程式 (3) との対応関係は明らかでしょう。実は一般の非可換ゲージ理論においても同様の式が成立することが知られています。古典電磁気の基本法則は驚くべき普遍性を持っているのです。

参考文献

[1] ランダウ，リフシッツ，『場の古典論』，東京書籍 (2022)
[2] 九後汰一郎，『ゲージ場の量子論』，培風館 (1989)