松田諒太

量子 Hall 効果

1 量子 Hall 効果とは

半導体界面に形成される 2 次元電子系に垂直に磁場をかけ，対角抵抗および Hall 抵抗を測定すると，磁場が弱い時は電気伝導の古典論 (Drude 理論) に一致した実験結果が得られるのに対し，強磁場を印加した際には次のような特異な振る舞いをすることが見出されました (図 1)．

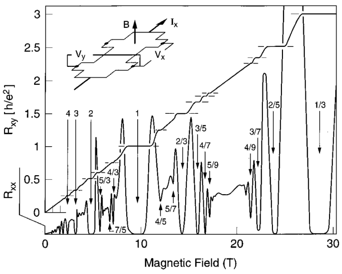

図 1: 低温強磁場下における 2 次元電子系の対角抵抗 (下) と Hall 抵抗 (上) の測定結果 [3]．図中に書き込まれた値はプラトーに対応する p/q を示したもの．

(1) 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を変えても Hall 抵抗が変化しない領域 (プラトー) が，Landau 準位の占有数が

$$\nu \equiv \frac{n_{2\mathrm{D}} hc}{eB} = \frac{p}{q}$$

となるような磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の前後に現れる．ここで p, q は整数，n_{2D} は電子密度である．

(2) プラトーにおける Hall 伝導率は厳密に

$$\sigma_{xy} = -\frac{p}{q}\frac{e^2}{h}$$

を満たし，対角伝導率は 0 である．

p/q が整数のときを**整数量子 Hall 効果**，分数のときを**分数量子 Hall 効果**といいます．整数量子 Hall 効果は Klitzing らにより 1980 年に，分数量子 Hall 効果は Störmer らにより 1982 年にそれぞれ実験的に発見されており，ともにノーベル賞を受賞しています (それぞれ 1985 年，1998 年)．両者のメカニズムは本質的に異なっており，前者は一体 Schrödinger 方程式から導出されますが，後者は電子相関が起源であることが知られています．ここでは整数量子 Hall 効果について，伝導率が量子化する理由を説明します．

2 伝導率の量子化の説明

2.1 Laughlin の思考実験

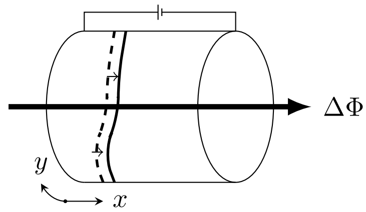

図 2: Laughlin が考えた配置．x 方向の系の長さを L_x，y 方向の周期を L_y とする．

Laughlin は伝導率の量子化を直観的に説明するため，2 次元電子系を y 方向に丸めてシリンダーの形にし，中に断熱的に磁束 $\Delta\Phi$ を挿入する思考実験を考えました [2]．

磁束 $\Delta\Phi$ の挿入により波動関数には位相 $e^{-2\pi i \Delta\Phi/\Phi_0\ y/L_y}$ がかかるので，非局在状態の波動関数が 1 価であるためには $\Delta\Phi$ が磁束量子 $\Phi_0 \equiv hc/e$ の整数倍である必要があります．特に $\Delta\Phi = \Phi_0$ のとき，状態の局在位置 X は L_x/D_L (D_L は Landau 準位の縮退度 $L_xL_y/2\pi l_B^2$，$l_B \equiv \sqrt{\hbar c/eB}$ は磁気長) だけシフトするので，エネルギーは $\Delta U = D_L \times eEL_x/D_L = eEL_x$ だけ増加します．電流は $j_y = c/L_x\ \Delta U/\Delta\Phi$ と表されるので，電気伝導率は伝導に寄与する非局在状態の数を n として

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{j_y}{E} = -n\frac{e^2}{h}$$

と表され，確かに量子化します．

2.2 TKNN 公式

一方，無限系 (バルク) における Hall 伝導度を線形応答理論を用いて計算すると，絶対零度における Hall 伝導度が以下のように書けることが示されました [1]．

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\frac{1}{2\pi}\sum_{\varepsilon_n < \varepsilon_F}\int_{\mathrm{MBZ}} d^2k [\nabla_{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{A}_{n\boldsymbol{k}}]_{k_z}$$

ここで MBZ は磁気ブリルアンゾーン，$\boldsymbol{A}_{n\boldsymbol{k}}$ は n 番目の準位の **Berry 接続** $\boldsymbol{A}_{n\boldsymbol{k}} \equiv -i \langle u_{n\boldsymbol{k}} | \nabla_{\boldsymbol{k}} | u_{n\boldsymbol{k}} \rangle$ です ($|u_{n\boldsymbol{k}}\rangle$ は磁気 Bloch 関数)．赤文字の部分は各バンドの**第 1 Chern 数**と呼ばれるトポロジカル不変量であり，必ず整数値を取ります．

参考文献

[1] Mahito Kohmoto. Topological invariant and the quantization of the hall conductance. Annals of Physics, 160(2):343–354, 1985.

[2] Robert B Laughlin. Quantized hall conductivity in two dimensions. Physical Review B, 23(10):5632, 1981.

[3] Horst L Stormer, Daniel C Tsui, and Arthur C Gossard. The fractional quantum hall effect. Reviews of Modern Physics, 71(2):S298, 1999.