聞 駿軒

相対性理論入門

1　座標系は観測者

物体の運動やその法則を表現するにはどうすればよいでしょうか。ある現象が「いつ、どこで」起きたかを表現するには、例えば「**自分から見て**右に x m、前に y m、上に z m、**今を基準に** t 秒後」というように数で指定すればよいことがわかります。これは**「座標」**と呼ばれ、物理学では対象の位置や時間を**座標**を使って数で表現し、このような数が満たす数学的な性質をもって物理法則とします。

ここで重要なのは、**座標は誰が見るかによって値が変わる**ということです。同じ事象でも、斜めを向いている人や、別の位置にいる人、過去や未来にいる人にとって事象の座標は違います。このように「どの立場で事象を見るか」を**座標系**と呼びます。つまり座標系とは、観測者そのものといえるわけです。一方、たとえ座標系はちがっても、誰から見ても変わらないものがあります。例えば二つの地点の「距離」です。[*1]すなわち、二つの地点の座標が見る人によって違っても、その距離の二乗は、

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

のように等しくなります。物理法則は誰にとっても共通のルールとして書きたいので、座標系によらないような書き方をしなければなりません。

2　特殊相対論～時間と空間は対等～

特殊相対性理論の本質を一言で表すと、**この「距離」の概念には時間も含めなければならない**ということになります。つまり、ある二つの事象の時間と空間の座標 $(t_1, x_1, y_1, z_1), (t_2, x_2, y_2, z_2)$ について、その「距離」の二乗

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= -c^2(t_1 - t_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \\ &= -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\end{aligned}$$

はどの慣性系 (座標系の一種) から見ても等しいということです。この距離を**「世界間隔」**と呼びます。そしてこのような構造を持つ 4 次元時空を**ミンコフスキー空間**と呼びます。また、重要なこととして、光の軌跡上の 2 点間の世界間隔は 0 になります。すなわち、誰が見ても、

$$0 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

となるのですから、誰が見ても光の速さは

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{|\Delta t|} = c$$

です。これは従来の力学からすると不思議に思えます。

このような構造の時空において、2 人の観測者間での座標変換、つまり、世界間隔を変えないような変換は、時間と空間の間での回転と 3 次元空間内の回転および並行移動だけで表されます。2 次元平面での回転は三角関数を用いて

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

と表せることを思い出すと、時間と空間の間の回転は三角関数に虚数を入れた双曲線関数というものを用いて、

$$\begin{aligned} ct' &= ct\cosh\theta - x\sinh\theta \\ x' &= -ct\sinh\theta + x\cosh\theta \end{aligned}$$

と表せることがわかります。この時間方向への回転を**「ブースト」**と呼び、これを含めた世界間隔を変えない変換を**「ローレンツ変換」**と呼びます。ブーストは、互いに一定の速度で動いている慣性系同士の座標の変換を表します。

3　一般相対論～重力は時空の歪み～

特殊相対性理論では、世界間隔を定める式が

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

でした。一般相対性理論では、この世界間隔を定める式が時空上の位置によって以下のように変わる場合を考えます。

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{4} g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

このように世界間隔が時空点ごとに変わるのは、「時空が歪んでいる」と解釈することができます。そしてこの「歪み」のもとこそが質量で、重力はこの「歪み」の効果として理解することができるのです。

[*1] ただしこの場合両者で時間は同じとします