

## Maxwell の悪魔と情報熱力学

## 1 エントロピー

## 熱力学でのエントロピー

大きな系を周囲から孤立させて長い時間放っておくと、温度や圧力、体積などのマクロな量に変化のないような状態になります。これを**平衡状態**といいます。平衡状態には**エントロピー**と呼ばれる量があり、これがエネルギー  $E$  や体積  $V$ 、粒子数  $N$  に対してどのような値になるかがわかると、系のマクロな性質が全てわかります。

エントロピーの重要な性質として、ある平衡状態から別の平衡状態に移るとき、エントロピーは必ず増大します (**熱力学第二法則**)。これは、系から取り出せるエネルギーに限界があることも表します。その限界は (熱浴の下で) 自由エネルギーと呼ばれる量  $F = E - TS$  の変化分となります。

$$W \leq -\Delta F$$

## 統計力学でのエントロピー

ミクロの世界の理論 (主に量子論) を使って、系のエネルギーが  $E$ 、体積が  $V$ 、粒子数が  $N$  であるような状態がいくつありえるか計算できます。この状態数を  $W(E, V, N)$  として、

$$S_B(E, V, N) = k_B \log W(E, V, N)$$

を**ボルツマンエントロピー**と呼びます。ボルツマンエントロピーは、系のスケールに比例する主要部に着目すると熱力学エントロピーに一致します。つまり、**統計力学は、量子論というミクロの物理から熱力学というマクロの物理への橋渡しとなる理論**なのです。

また、熱力学と統計力学を用いると、エントロピーは

$$S = -k_B \sum_n p_n \log p_n$$

と表せることが導かれます\*1。

## 情報理論でのエントロピー

情報理論において、ある事象  $n$  が起こる確率を  $p_n$  と書くと、それが起きたときの情報は  $-\log p_n$  で表されます。何か起きたとき、どれだけの情報を得られるかの平均値を**シャノンエントロピー**とよびます。

$$S = - \sum_n p_n \log_2 p_n$$

これは先ほど見た熱・統計力学におけるエントロピーとほぼ同じ形をしています。

## 2 Maxwell の悪魔

熱力学によると、系が孤立しているとき、つまり外部と何かやりとりがないとき、エントロピーが増えるような状態変化は起こらないのです。ここで、以下の思考実験を考えてみます。

- 箱の中に気体を入れ、平衡状態になるまで待つ。
- 中央に仕切りを入れ、自由に開閉できる小さい窓を設置する。
- 気体の粒子の運動を観測できる「悪魔」が粒子を見て  
高エネルギー (速い) → 右側に通す  
低エネルギー (遅い) → 左側に通すように窓の開閉を調節する。  
すると、図1のように箱の右側にだけ温度が高い状態を作れます。しかし、

この状態は最初よりエントロピーが高い状態になってるし、これを使ってエネルギーを取り出すことができず、熱力学第二法則を破ります。一体何がいけなかったのでしょうか。

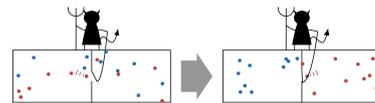


図 1: Maxwell の悪魔の概要

赤い粒子がエネルギーが高く青い粒子はエネルギーが低い。悪魔は赤い粒子が左から来たら窓を開け、右から来たら窓を閉じる。青い粒子については逆に右から来たら窓を開け、左から来たら窓を閉じる。

## 3 情報熱力学

答えは、「悪魔」が系から情報を得ているところにあります。情報を得るには**系を測定する**必要があります、常に新しい情報を記録するには**古い情報を消去**する必要があります。そしてこの測定と情報の消去という過程には**必ず仕事が必要**なのです。このように、情報も熱などと同じような物理量として取り扱う必要があるのです。情報も測定に入れると、Maxwell の悪魔のモデルと矛盾しない以下のような熱力学第二法則が成り立ちます。

$$W \leq -\Delta F + k_B T I^{*2}$$

## 参考文献

- [1] 清水明. 『熱力学の基礎 I』. 東京大学出版会 (2021)
- [2] 齋藤圭司. 『ゆらぐ系の熱力学』. サイエンス社 (2022)
- [3] 沙川貴大. 『非平衡統計力学』. 共立出版 (2022)

\*1 ただし、 $p_n$  はカノニカル分布において状態が  $n$  番目の状態である確率です。  $p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_i e^{-\beta E_i}}$  (ただし、 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ )

\*2 ここで、 $I$  は測定によって得られる情報量、つまり測定後の系とメモリの相互情報量です。