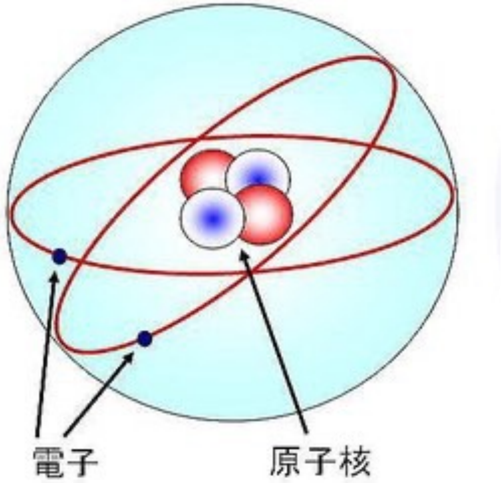
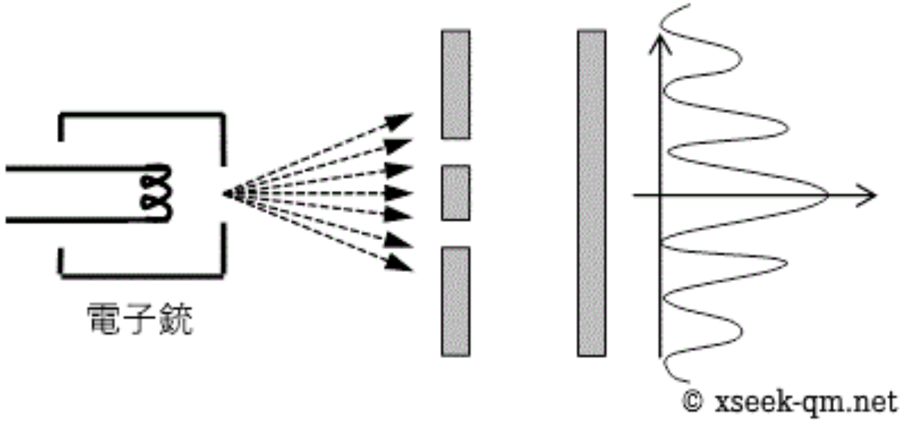
PHYSICS LAB. 2024

# 量子論の基礎と一般確率論

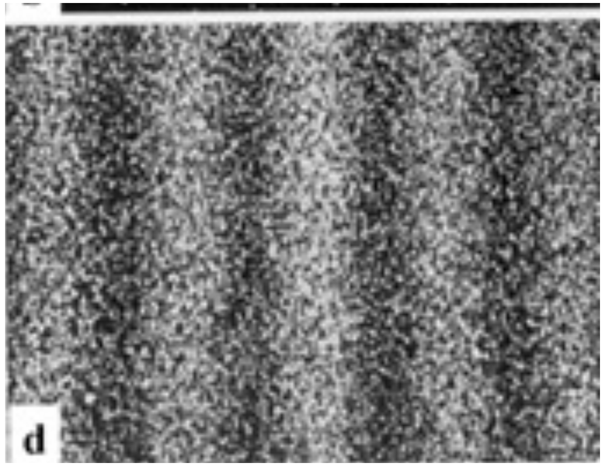
Physics Lab. 2024 量子班
梅川 舜

# 量子論

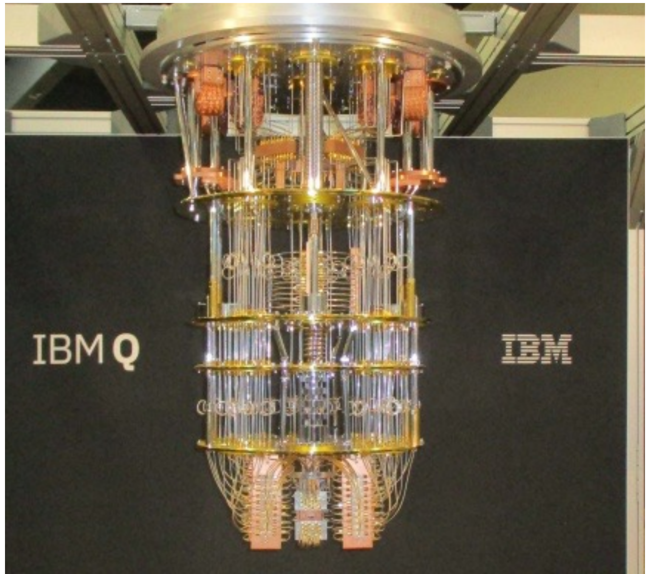



- ミクロな世界の法則
- 「不思議」な性質
  “粒子と波の二重性” 位置が決まってない！




- 量子コンピュータなどの応用



# 量子基礎論

量子論の普遍的な性質

- 不確定性関係（両立不可能性）
- エンタングルメント（非局所相関）
- 数理物理
- より一般の理論（一般確率論）の中での特徴付け

# 不確定性関係

- 複数の物理量は同時に一定精度で確定できない

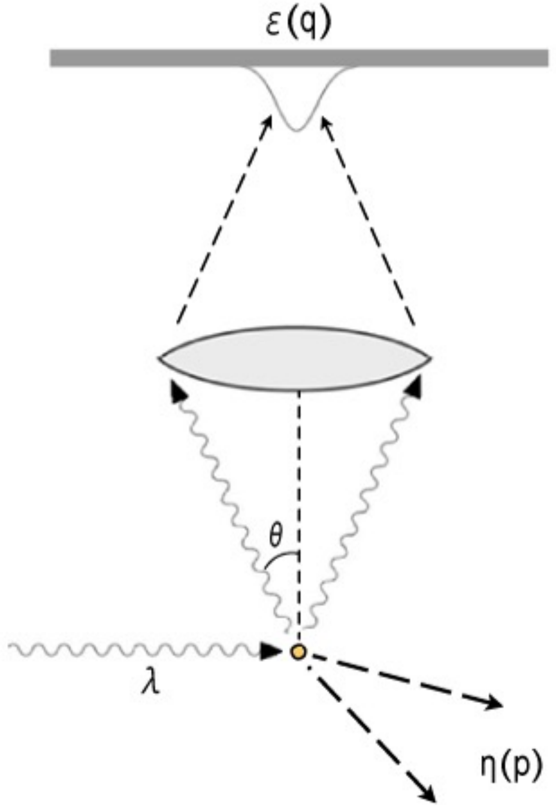
- ハイゼンベルグの思考実験：

  顕微鏡で電子の位置を測りたい

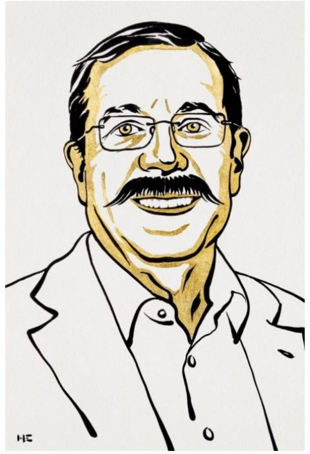
  位置の分解能は波長程度　$\Delta x \approx \lambda$

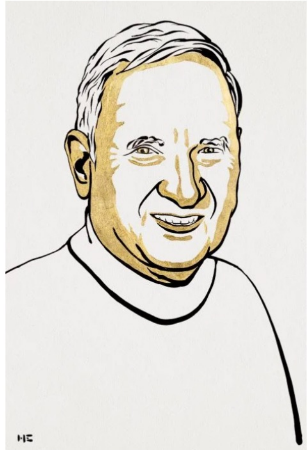
  粒子の運動量は光子の運動量程度変化する　$\Delta p \approx \frac{h}{\lambda}$

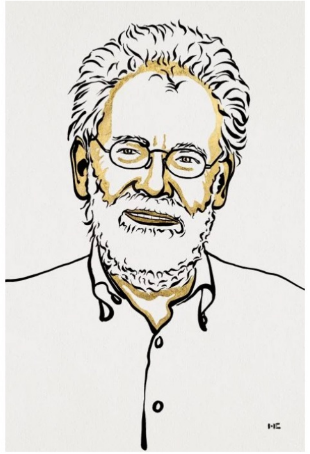
$$\Delta x \Delta p \approx h$$



# ベルの不等式の破れ


Ill. Niklas Elmehed © Nobel Prize Outreach
Alain Aspect
Prize share: 1/3


Ill. Niklas Elmehed © Nobel Prize Outreach
John F. Clauser
Prize share: 1/3


Ill. Niklas Elmehed © Nobel Prize Outreach
Anton Zeilinger
Prize share: 1/3

- エンタングルメント（非局所相関）
- 隠れた変数の理論
  物理量の値は本当は決まっているが、
  我々がそれを指定するパラメータを知らないだけ

- ベルの不等式
  局所隠れた変数の理論なら成り立たなければならない不等式

→量子論と実在論を実験で区別できる！

# ベルの不等式の破れ


- CHSH不等式

  ベルの不等式の一つの形式

  ２つの空間的に離れた系AとBでの相関を考える

  Aでは$X$または$Y$、Bでは$X'$または$Y'$を測る

  （どれを測っても１か－１が確率的に得られる）

$$\begin{aligned} C &:= |\langle X_A X'_B\rangle + \langle X_A Y'_B\rangle + \langle Y_A X'_B\rangle - \langle Y_A Y'_B\rangle| \\ &= |\langle X_A(X'_B + Y'_B)\rangle + \langle Y_A(X'_B - Y'_B)\rangle| \\ &\leq \langle|(X'_B + Y'_B)| + |(X'_B - Y'_B)|\rangle \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

- 量子論の場合最大で$C = 2\sqrt{2}$（チレルソン限界）

# 量子論の公理系

ちゃんと定式化するのは大変…

- ベクトル空間（ヒルベルト空間）$H$
- 状態 $\rho$ は $H$ 上の（トレースが 1 の正値エルミート）演算子
- 物理量 $A$ は $H$ 上の（エルミート）演算子
- 測定値は $A$ の固有値 $a$ のみを取る
- $A = \sum_a aE(a)$
- 測定結果が$a$である確率は $\mathrm{tr}[\rho E(a)]$

# 量子論での定式化

- 不確定性関係

　物理量$A$と$B$

　ゆらぎ（分散）$\sigma$、誤差$\varepsilon$、擾乱$\eta$

$$\sigma(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|$$

$$\varepsilon(A)\eta(B)+\sigma(A)\eta(B)+\varepsilon(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|$$

など…

- エンタングルメント

　直積の確率混合 $\rho=\sum_i p_i\rho_{1i}\otimes\rho_{2i}$ で書けない状態

　定量化（エントロピー、ネガティビティーなど）

# 量子論は不思議？

- 難しい。どこから来たかよくわからない
- 余談: 量子論の基礎に対する昔の意識

# 量子論は不思議？

- 難しい。どこから来たかよくわか
- 余談: 量子論の基礎に対する昔の

よりも、私が一番好きなのは、基礎的・原理的な問題である（と後年わかった）のに、当時の東大理学部物理学科は、そういう研究はしてはいけないし、考えてもいけない、という雰囲気が満ちあふれていたからだ。

たとえば、量子測定理論やベルの不等式について全く無知な「偉い先生」が、そういうものがいかにくだらないかを講義で力説していた。何も知らないのに批判するというのは、今思えばお粗末きわまりないことなのだが、学生時代は影響されてしまった。統計力学の基礎的問題も考えてはいけないと、別の偉い先生が講義で言っていた。また、今の学生さんには信じられないと思うが、量子論を重力を含むように拡張する研究も、当時の東大理学部物理学科では誰もやってはおらず、御法度ようなものだったのだ。

清水明「野蛮人が物理学者になるの記」
https://as2.c.u-tokyo.ac.jp/archive/michishirube.pdf

# GPT

# General Probabilistic Theories

# 一般確率論

- General Probabilistic Theories (GPT)
- 量子論や古典論を含むより一般の理論
- 状態や測定に対する物理的要請から出発

# 状態

- 状態空間は凸集合：確率混合はできる！
  確率$p$で状態$x$にあり、確率$1-p$で状態$y$にあるような
  状態$px+(1-p)y$はあるはず

- 純粋状態は端点
  他のどんな状態の確率混合としても
  書けない状態

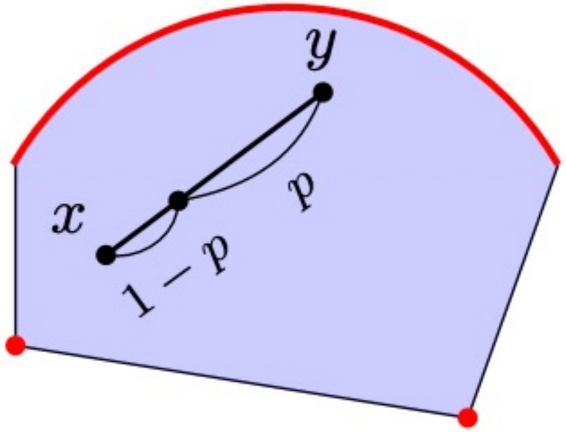
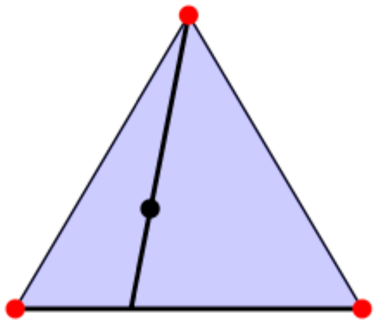


図 1: 凸集合（青）と端点（赤）

# 古典系

- 物理量の値が全て決まっている純粋状態があって、
  全ての状態がその確率混合として**一意的に**表せるような系

→古典系の状態空間は単体



単体

単体でない

# 測定（事象）

- 測定値の確率分布は予言できるはず

- 事象（２値測定）

  各状態に対してその事象が起きる確率を割り当てる

$$f: S \to [0,1]$$

  確率混合に対して整合的：

  状態$x$で確率$p_x$で起こり状態$y$で確率$p_y$で起こる事象は

  状態$px + (1-p)y$で確率$pp_x + (1-p)p_y$で起こる

$$f(px + (1-p)y) = pf(x) + (1-p)f(y)$$

# 量子論は不思議？

- エンタングルメント
- 同時測定不可能性
- 複製禁止定理etc

実は非古典系に一般の性質

- 本当に量子に固有の性質は何か？

# 量子基礎論

量子論の普遍的な性質

- エンタングルメント（非局所相関）
- 不確定性関係（両立不可能性）
- 数理物理
- より一般の理論（一般確率論）の中での特徴付け