Physics Lab. 2024　五月祭学生講演

物性物理とトポロジー

-Why topology matters to matters?

「重要である」「物質」

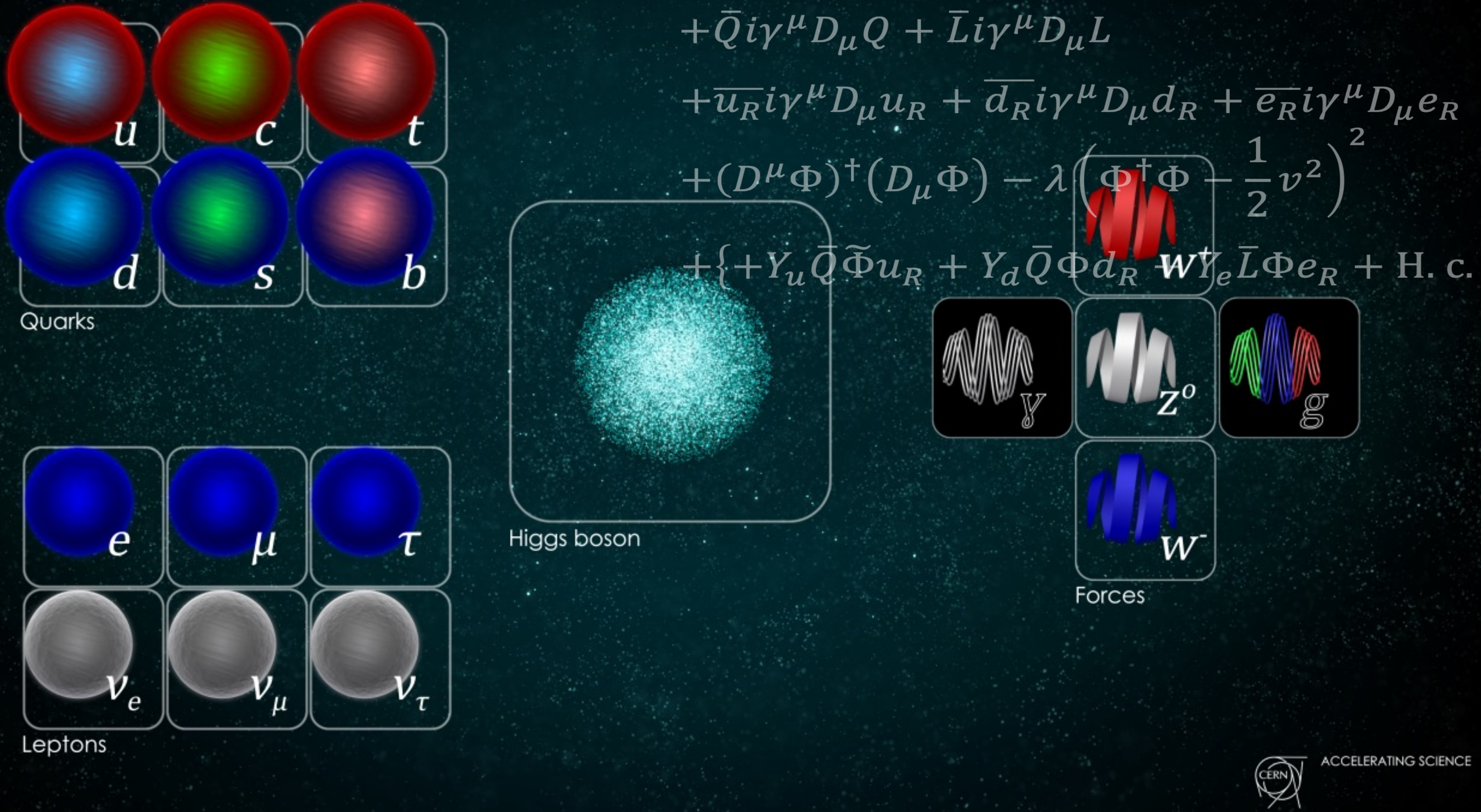
Physics Lab. 2024 統計物理班班長 中柴柊馬

「物理学」って？

物理学の対象＝宇宙？

物理学の対象＝素粒子？

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{SM} = & -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\
& + \bar{Q} i\gamma^{\mu} D_{\mu} Q + \bar{L} i\gamma^{\mu} D_{\mu} L \\
& + \overline{u_R} i\gamma^{\mu} D_{\mu} u_R + \overline{d_R} i\gamma^{\mu} D_{\mu} d_R + \overline{e_R} i\gamma^{\mu} D_{\mu} e_R \\
& + (D^{\mu}\Phi)^{\dagger}(D_{\mu}\Phi) - \lambda\left(\Phi^{\dagger}\Phi - \frac{1}{2}v^2\right)^2 \\
& + \{+Y_u \bar{Q}\tilde{\Phi} u_R + Y_d \bar{Q}\Phi d_R + Y_e \bar{L}\Phi e_R + \mathrm{H.c.}\}
\end{aligned}
$$



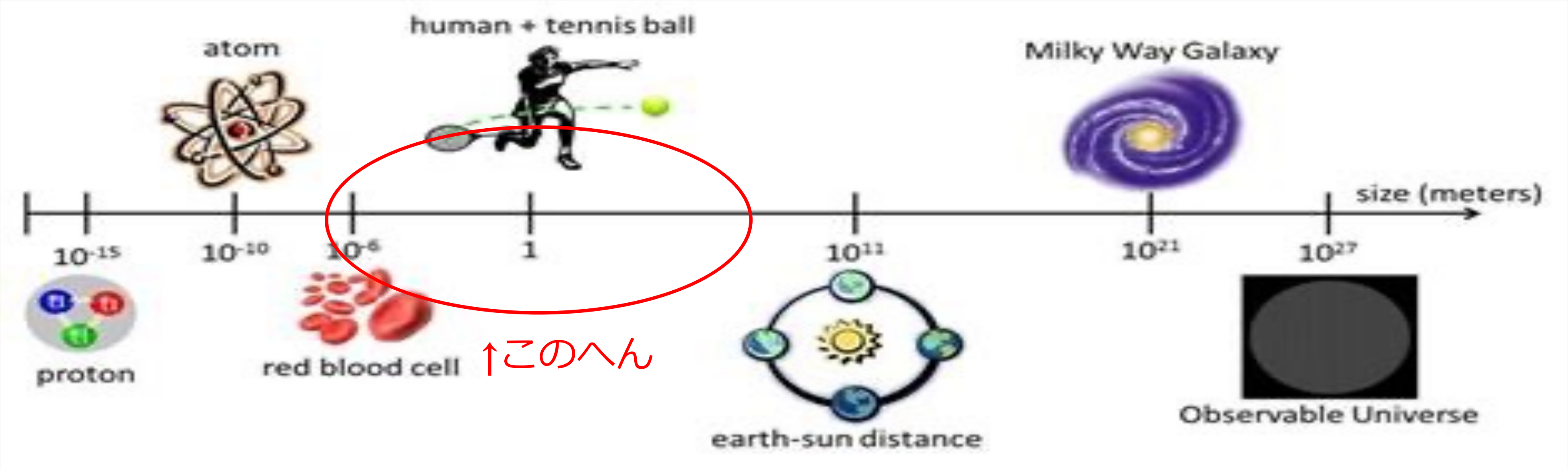
物理学の対象＝素粒子？

「物性」という第三の選択肢

物性物理……？

物性物理学＝「物」の「性」質を理解するための物理学。

スケールで言うとこんな感じ。

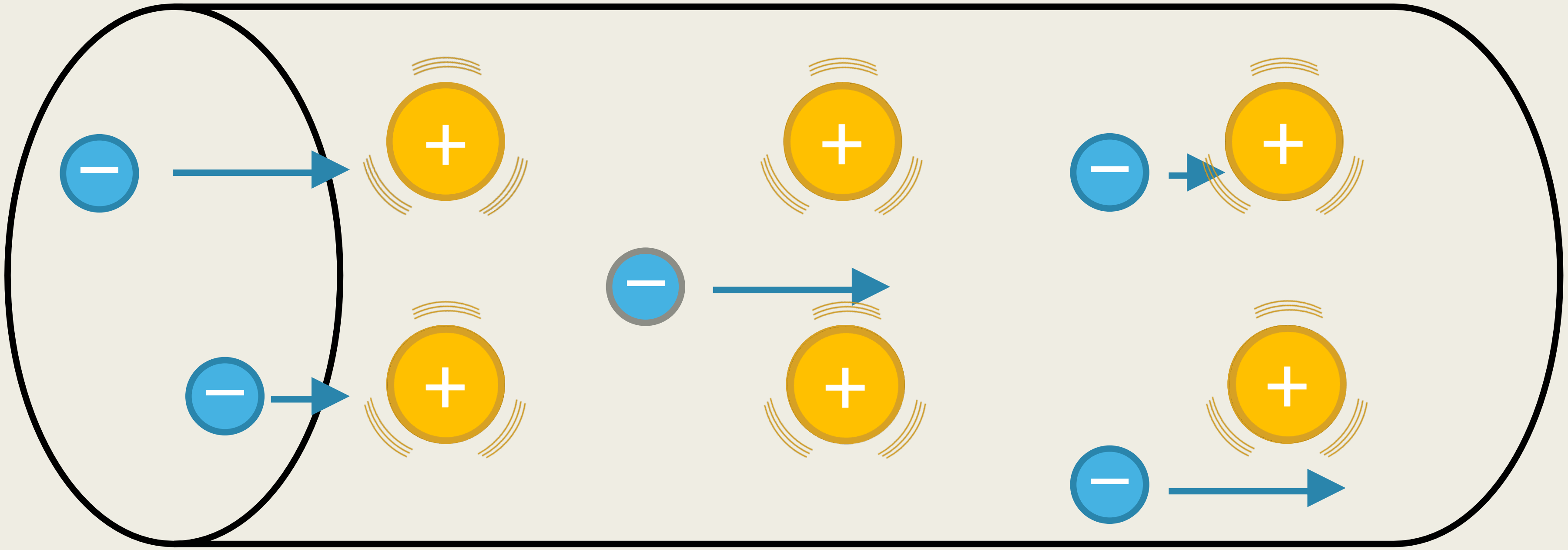


https://osuwomeninphysics.wordpress.com/2013/03/13/smaller-than-microscopic-2/

「ロマンがない！」だって？いいえ、そんなことはありません。

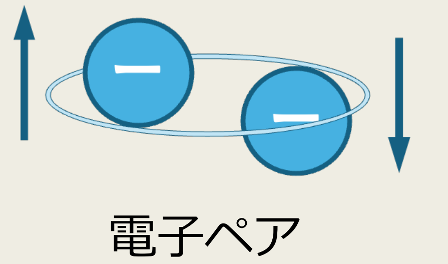
たとえば、超伝導

○普通の物質: 電子が単独で運動する

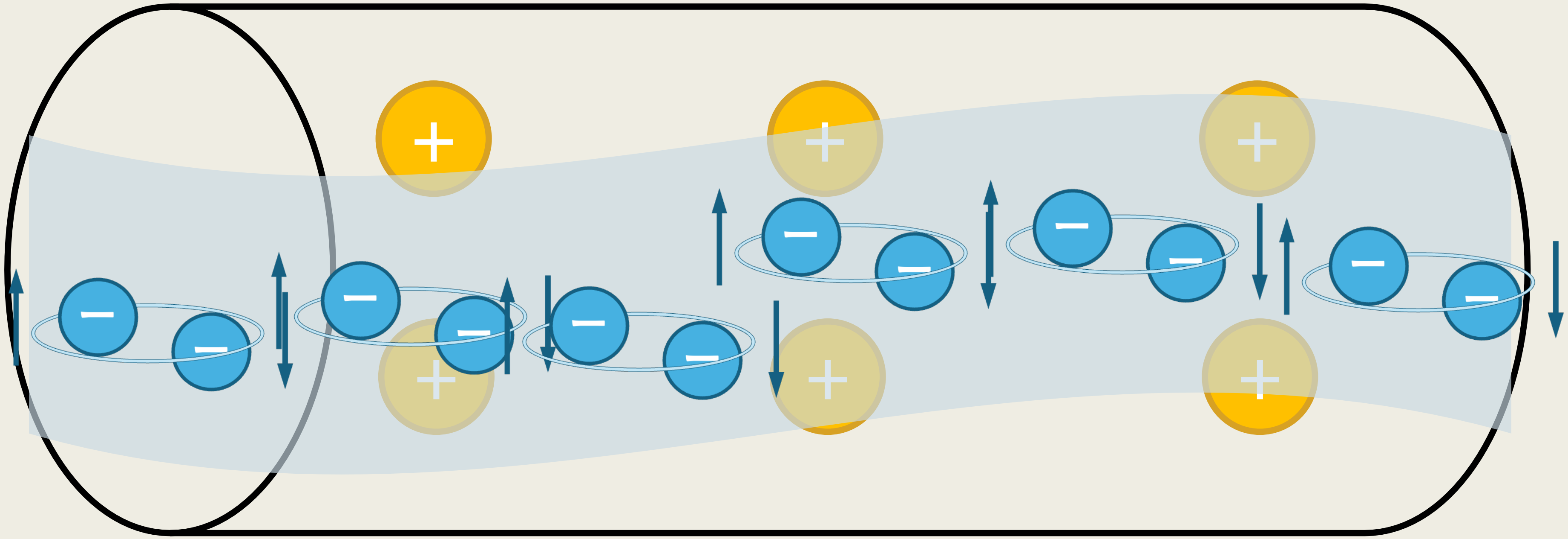


熱振動する原子核が電子の運動をさまたげる→電気抵抗が発生

超伝導

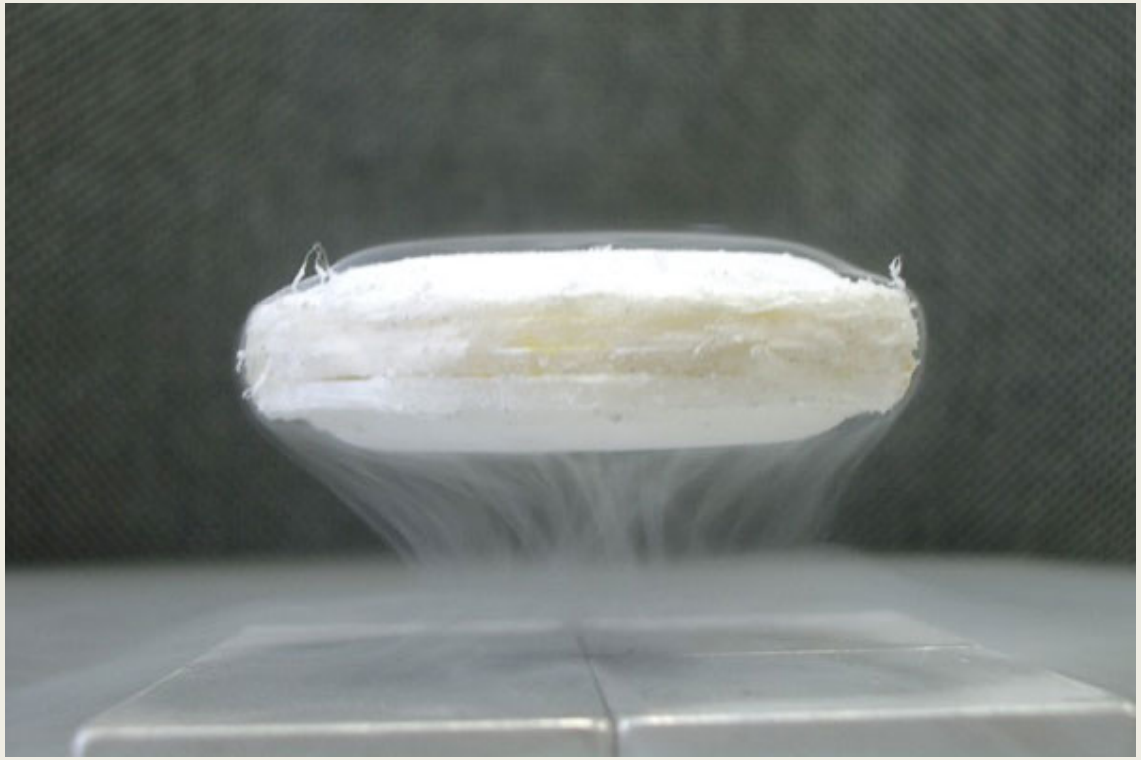


〇超伝導体: 電子がペアを作って、ひとつに集まる



超伝導

- 物性物理が担う未来の技術



リニアモーターカー

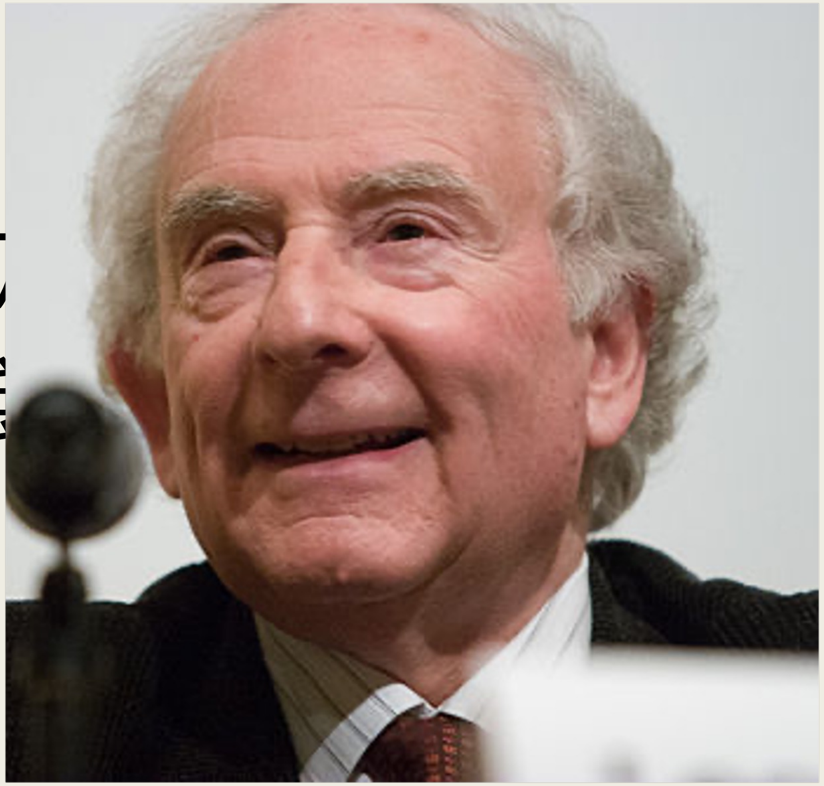
https://www.tetsudo.com/column/111/

超伝導

Bokuno (僕の)
Cangaeta (考えた)
Saikyouno (最強の)
理論

超伝導

Bardeen



Cooper

Schrieffer

顔写真はWikipediaより

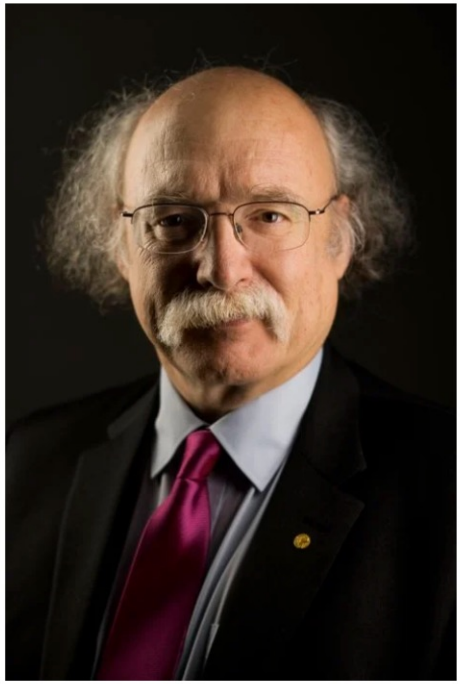
2016年ノーベル物理学賞

201

© Nobel Media AB. Photo: A. Mahmoud

David J. Thouless

Prize share: 1/2



© Nobel Media AB. Photo: A. Mahmoud

F. Duncan M. Haldane

Prize share: 1/4

© Nobel Media AB. Photo: A. Mahmoud

J. Michael Kosterlitz

Prize share: 1/4

「トポロジカル相転移、および物質のトポロジカル相の理論的発見」

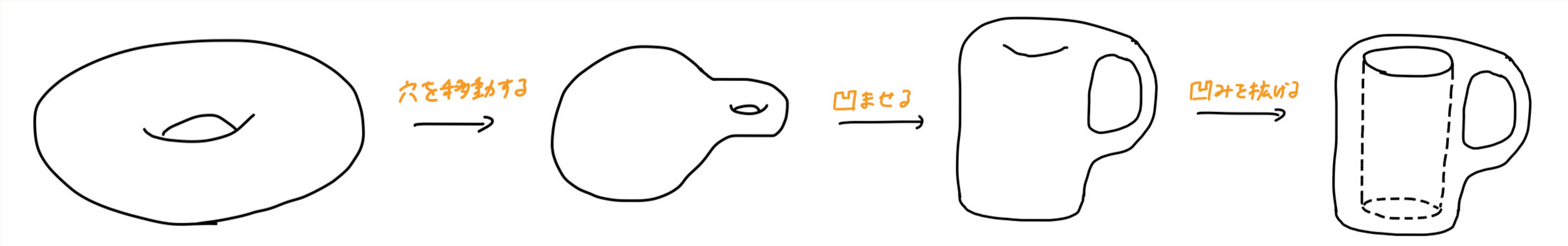
The Nobel Prize in Physics 2016 was awarded with one half to David J. Thouless, and the other half to F. Duncan M. Haldane and J. Michael Kosterlitz "for theoretical discoveries of topological phase transitions and topological phases of matter"

images from nobelprize.org

トポロジーって？

トポロジー: 「連続変形しても変わらない性質」を調べる学問。

- ぐにゃぐにゃ曲げても変わらないもの＝「トポロジカルな性質」
- 例えば、穴の数。



穴の数は、ドーナツをマグカップにしても変わらない

トポロジーって？

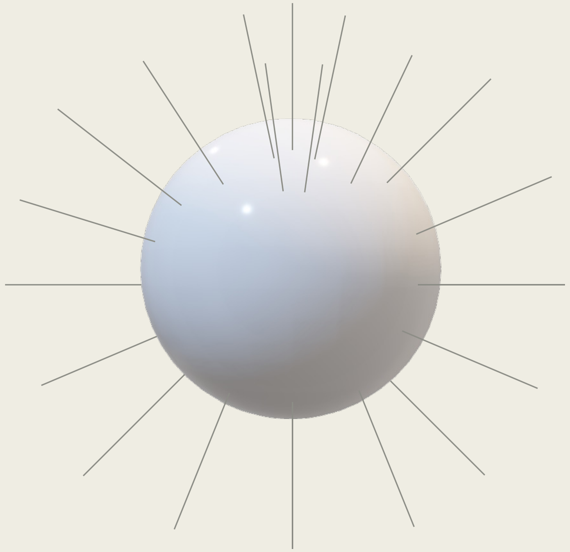
「穴を開ける」という変形は連続ではない

- 「穴を開ける」操作はトポロジーを変える

その他、「破る」「切る」「貼る」なども連続ではない

耳という空間に穴を開ける操作を施した図→

連続的な変形では、この毛の向きを変えられない↓



トポロジーって？

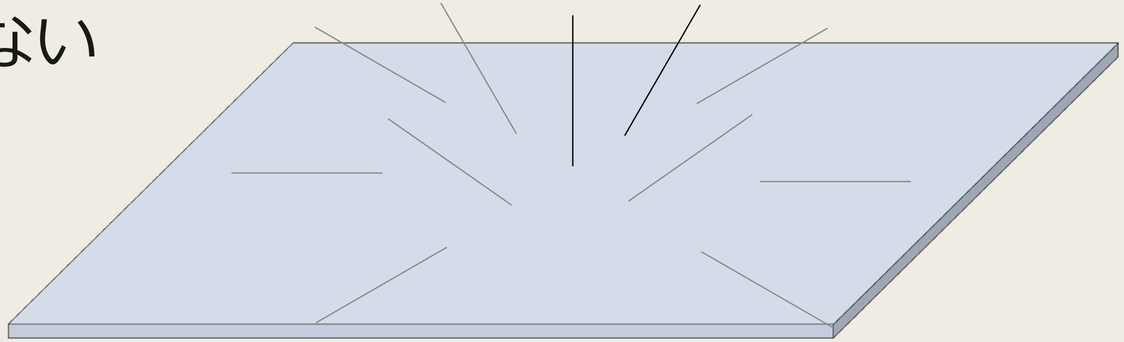
つむじとトポロジー: 「毛の生えたボールの定理」

- 球面上の各点各点に毛を生やす
- この毛を連続的にすべて同じ方向に向ける(梳かす)ことはできない！

球面上の毛を同じ方向に揃えようとすると、「つむじ」が生じる

- 平面だと「つむじ」は生じない

連続的に同じ向きに揃えられる→



連続的な変形では、この毛の向き

トポロジーって？

つむじ→

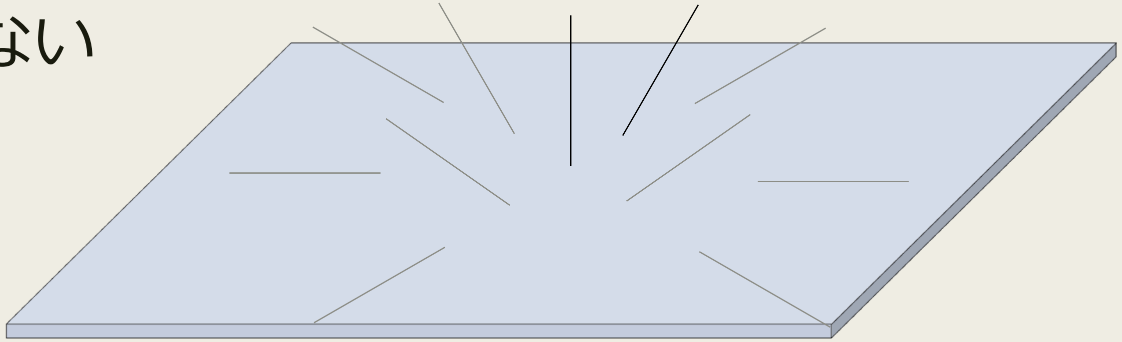
つむじとトポロジー:「毛の生えたボールの定理」

- 球面上の各点各点に毛を生やす
- この毛を連続的にすべて同じ方向に向ける(梳かす)ことはできない！

球面上の毛を同じ方向に揃えようとすると、「つむじ」が生じる

- 平面だと「つむじ」は生じない

連続的に同じ向きに揃えられる→



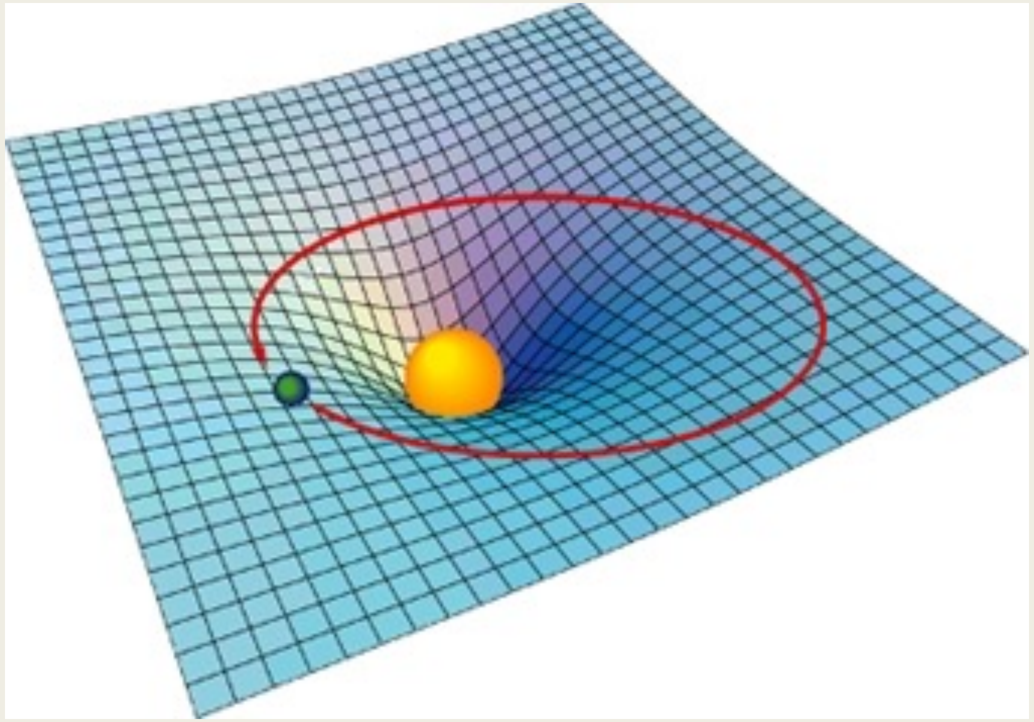
Why topology matters to physics?

物理学では「かたち」が重要！！

- 空間のかたちは、運動を支配する→「力」を生む！

重力とは、時空の「曲がりぐあい」

質量のある物体が時空をゆがめて、力を生じる



安東研究室HPより引用

PHYSICS LAB. 2024

Why topology matters to physics?

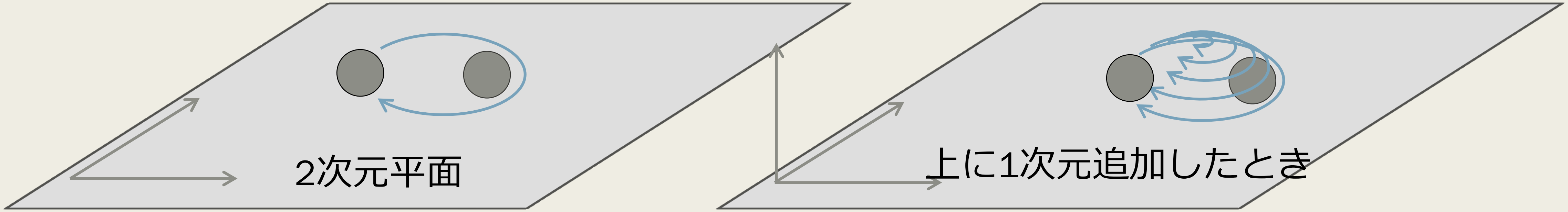
○物理とトポロジーのかかわり

トポロジカルな性質＝安定な性質！

- 連続変形で変わらない性質は、外的なゆらぎ(摂動)に強い

トポロジカルな安定性を利用した物理: トポロジカル量子コンピュータ

- 2次元平面では、「粒子を何回入れ替えたか？」が意味を持つ



2次元平面内での「入れ替え」を計算のステップにすれば、ノイズに強くて安定

トポロジカル物性のこころ

「トポロジカル物性」

＝電子の住む「空間」のトポロジカルな構造に由来する現象。

fin.

トポロジカル物性のこころ

「トポロジカル物性」

＝電子の住む「空間」のトポロジカルな構造に由来する現象。

さて、ここで2つの疑問が生じる:

- 電子の住む「空間」とは何なのか？
- その空間のかたちを調べるにはどうすればよいか？

「電子の『住む』空間」って？

電子の状態は、電子の持つエネルギーで特徴づけられる

- 量子力学によると、電子の取るエネルギーの値はとびとびになる
- エネルギー準位＝「エネルギーが下から何番目の値か？」

固有空間: 「エネルギーが何らかの確定値を取る電子の状態」を集めたもの

メモ: 「状態」=ハミルトニアン(エネルギーの演算子)の固有ベクトル

状態空間のかたち

電子のエネルギーが、ある物理量 R によって決まるものとする

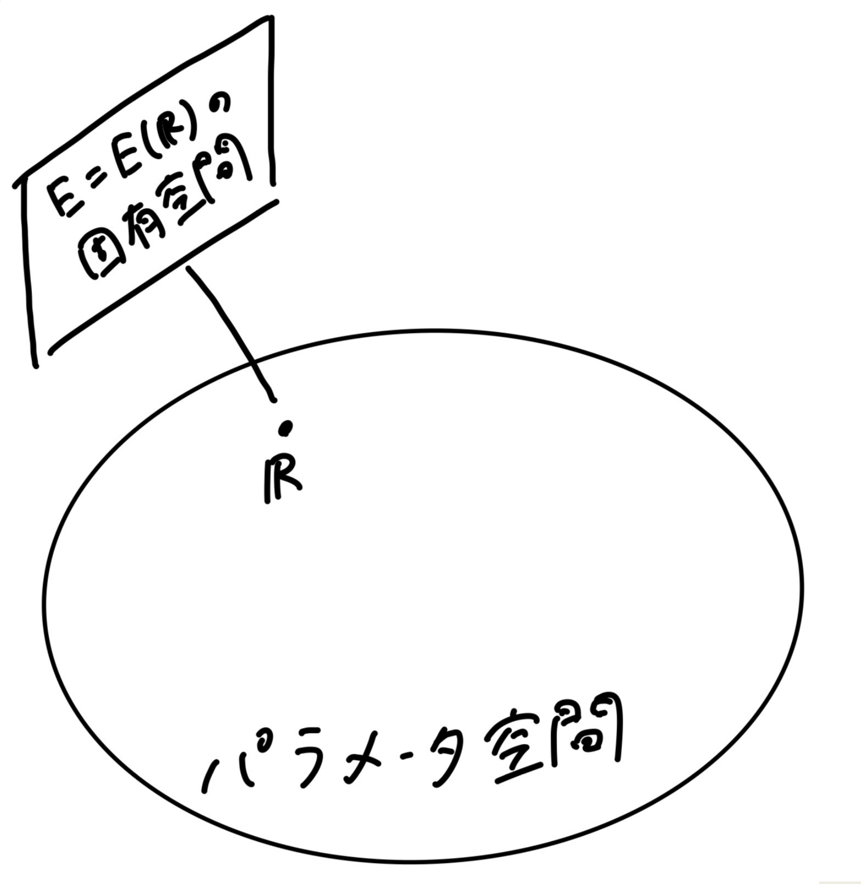
- 例: 物体に磁場 Bをかけたとき

エネルギーの値が、 R によってパラメータづけられる: $E(R)$

- パラメータ R の各値に対して、エネルギー$E(R)$の固有空間がある
- 「パラメータ空間の各点の上に、固有空間が生えている」

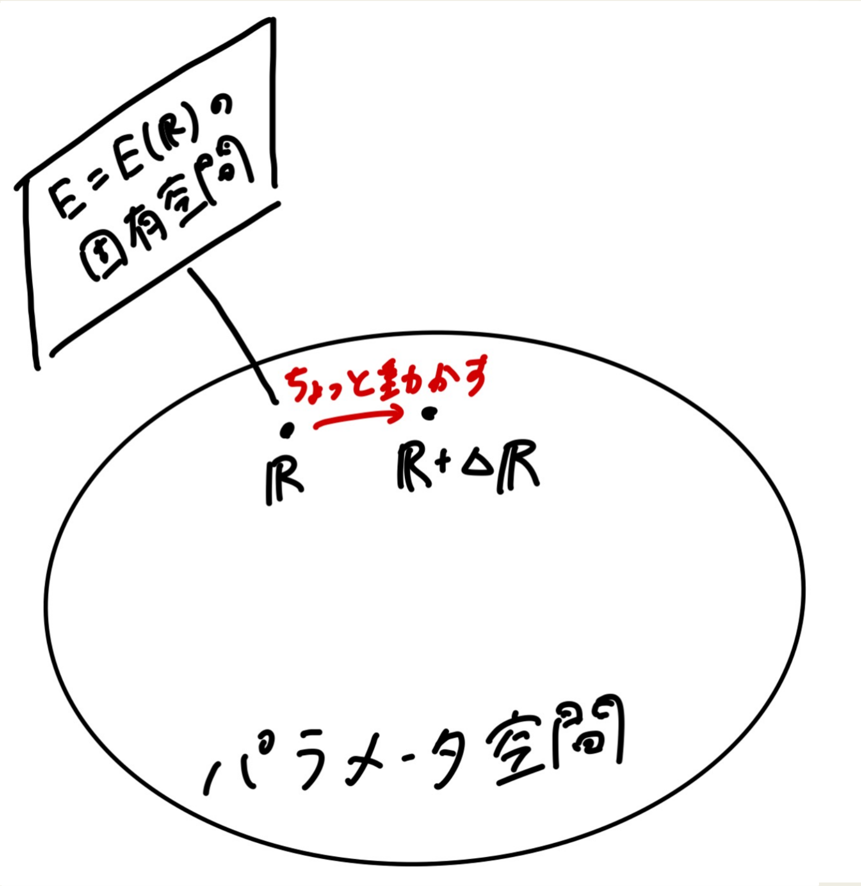
状態空間のかたち

状態空間の構造



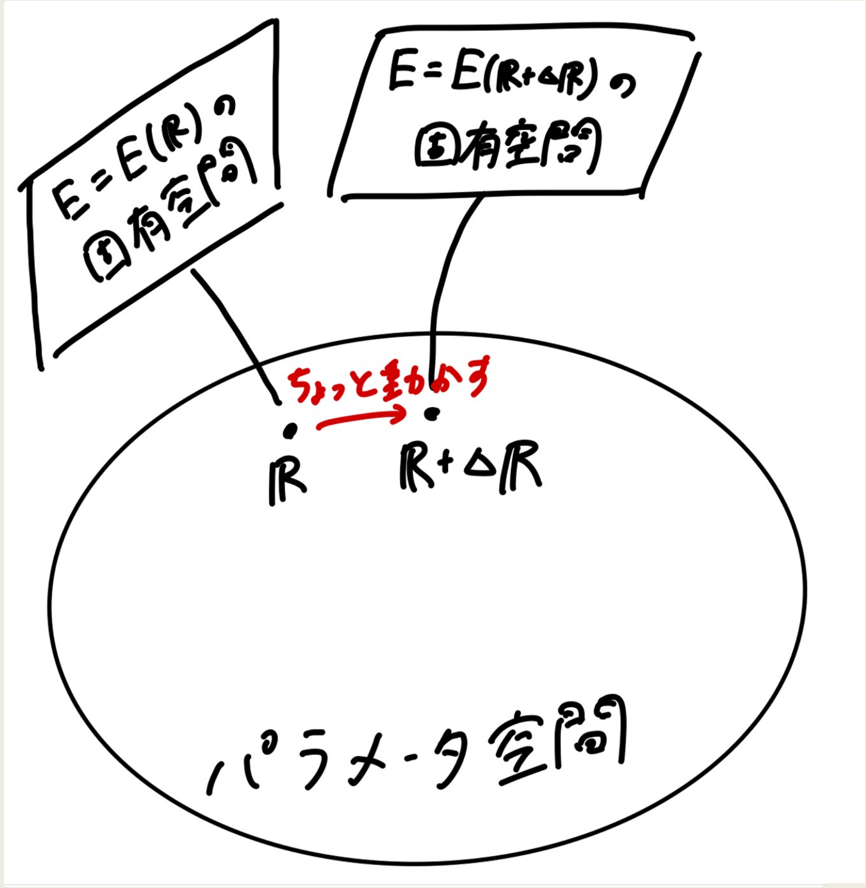
状態空間のかたち

状態空間の構造



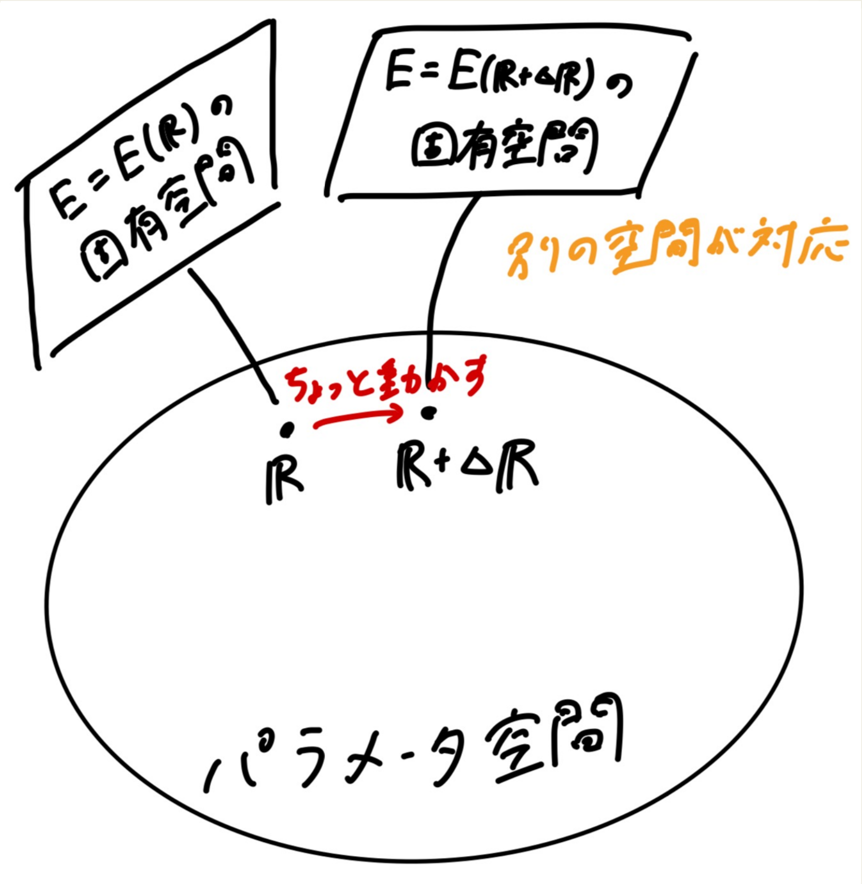
状態空間のかたち

状態空間の構造



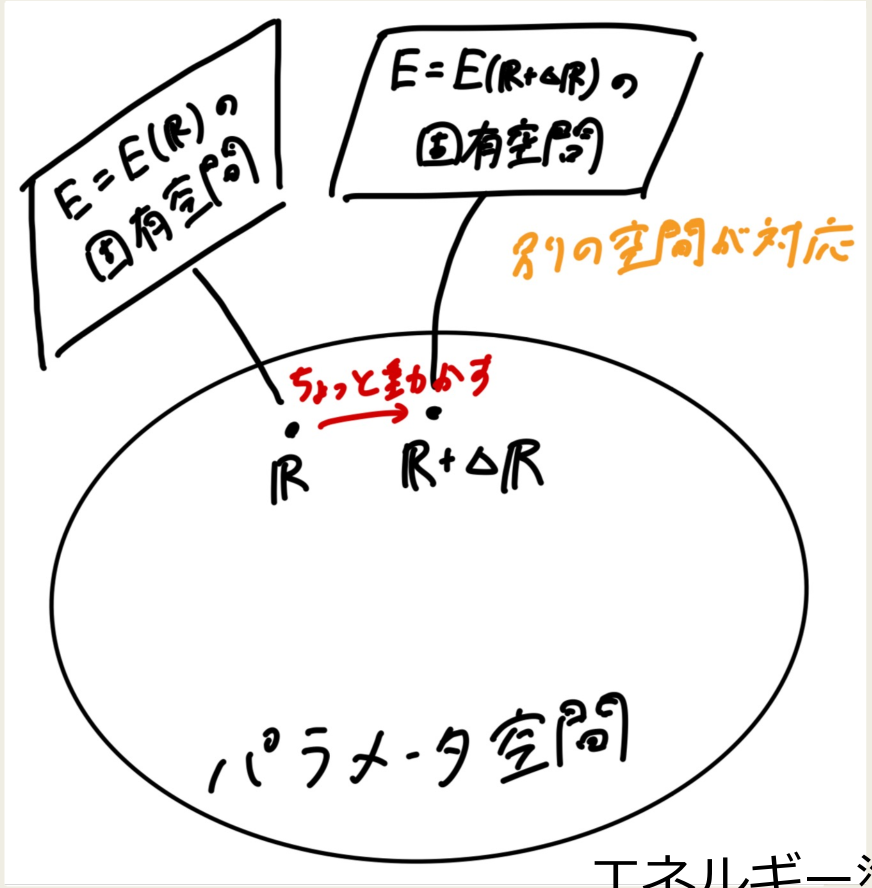
状態空間のかたち

状態空間の構造



状態空間のかたち

状態空間の構造



エネルギー準位ごとに、このような構造がある

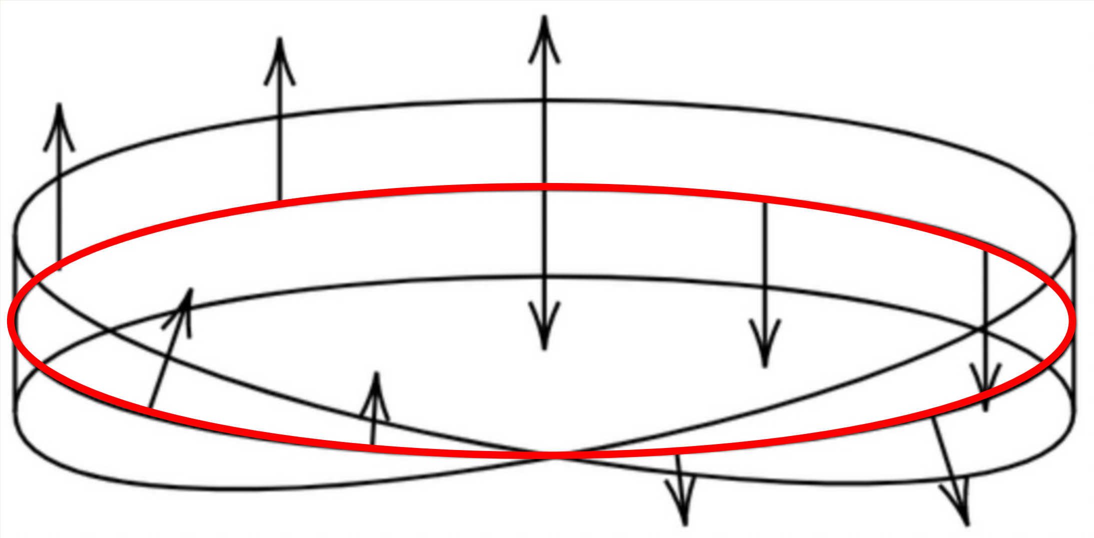
「空間の各点各点に空間が生えている」構造が、パラメータ空間全体にある

「空間の上に空間が生えている」

状態空間は「空間の上に空間が生えている」構造

- 状態空間のかたちを調べる＝固有空間の「生え方」を調べる

↓「変な生え方」の例: メビウスの帯



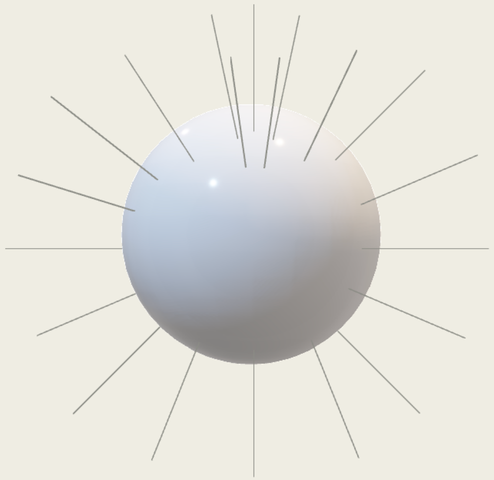
- 状態空間のかたちは、エネルギーのパラメータ依存性で決まる

「空間の上に空間が生えている」

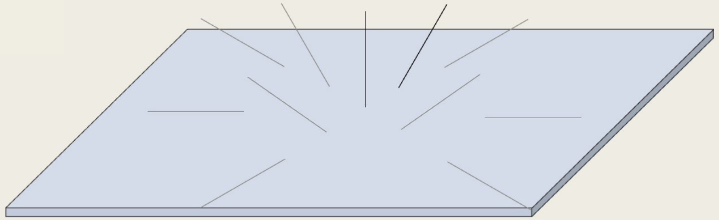
エネルギーがR に依存しない時は、すべての点に同じ固有空間が生える

- このような「まっすぐな」生え方に連続的に移り変われる
  →トポロジカルに「自明」
- 連続的に移り変われない時、電子は「**トポロジカル物性**」を示す

ふたたび、毛の生えたボールについて考察



「全部同じ向き」の生え方に、連続的に移り変われない



移り変われる

空間の「生え方」を調べる

ここまでのおさらい

- 状態空間は、パラメータ空間の「各点に固有空間が生えている」構造
- この「生え方」が非自明なとき、トポロジカル物性があらわれる！

空間の「生え方」を調べる

ここまでのおさらい

- 状態空間は、パラメータ空間の「各点に固有空間が生えている」構造
- この「生え方」が非自明なとき、トポロジカル物性があらわれる！

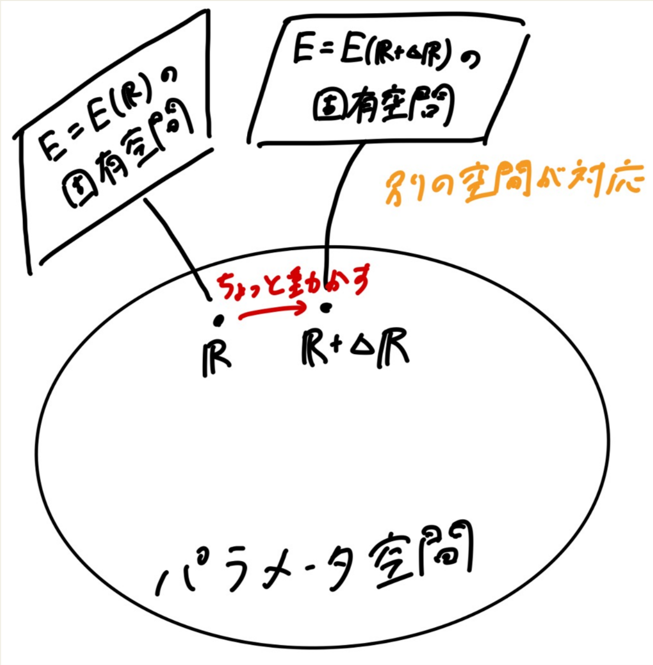
ところで、

「空間の生え方を調べる」って、どういうこと？？

空間の「生え方」を調べる

生え方を調べる

＝ある点に生えている空間と、そこからちょっとだけ離れた点に生えている空間を比べて、その差をはかる



←こういう状況を考えて、2つの空間の「差」をはかる

空間の「生え方」を調べる

生え方を調べる

＝ある点に生えている空間と、そこからちょっとだけ離れた点に生えている空間を比べて、その差をはかる

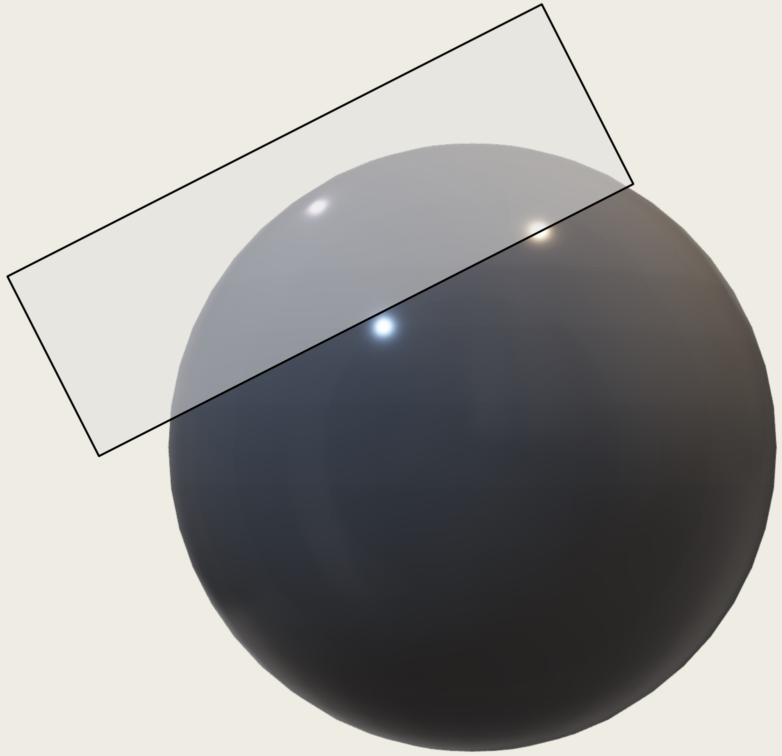
Q. 「空間を比べる」ってどういうこと？

→空間を張る「骨組み(基底)」のあり方を比べること。

- 空間の中には、その空間の「骨組み」となる要素＝基底がある

「生え方」を調べる: 接平面の例

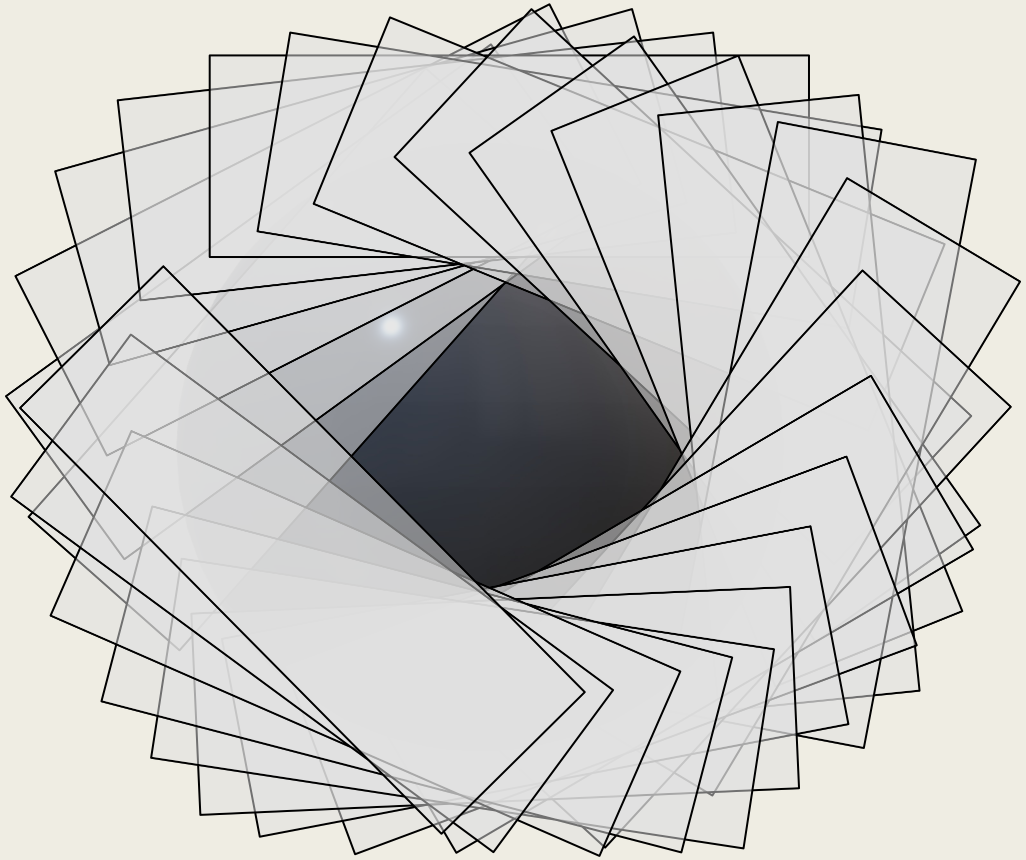
接平面＝2次元曲面上のある点で曲面に接する平面



※球は3次元だが、その表面は2次元

「生え方」を調べる: 接平面の例

接平面＝2次元曲面上のある点で曲面に接する平面

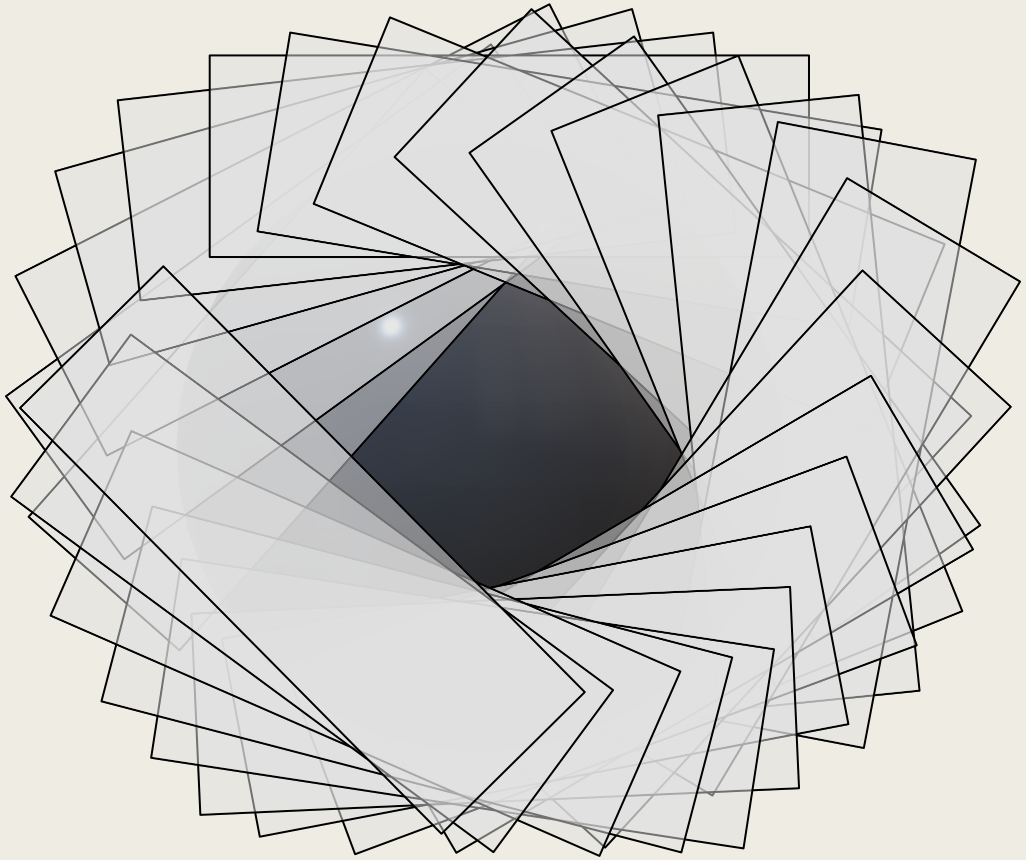


※球は3次元だが、その表面は2次元

これを、曲面の各点各点に接平面という空間が「生えている」、と見る

「生え方」を調べる: 接平面の例

接平面＝2次元曲面上のある点で曲面に接する平面



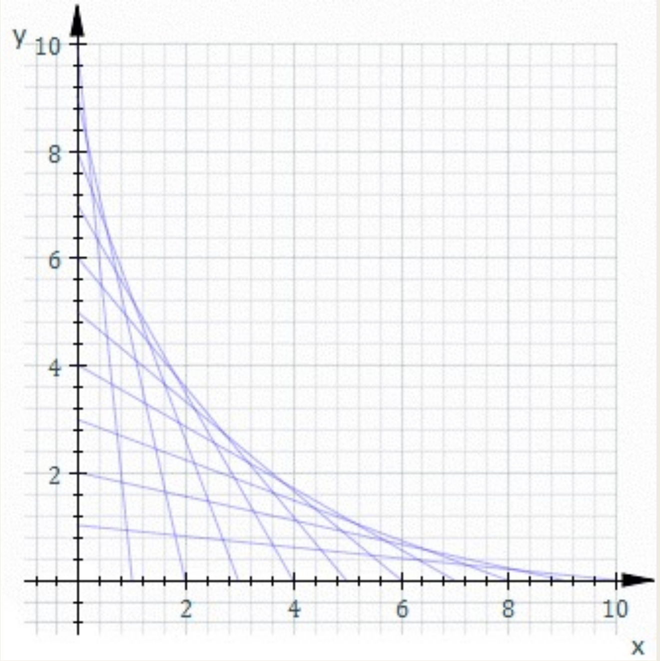
フレンチクルーラーの画像

これを、曲面の各点各点に接平面という空間が「生えている」、と見る

「生え方」を調べる: 接平面を例に

接平面の「生え方」を調べる＝曲面のかたちを調べる

※わかる人向けの注: 曲線(包絡線)と接線の関係



「生え方」を調べる: 接平面を例に

接平面の「生え方」を調べる＝曲面のかたちを調べる

※わかる人向けの注: 曲線(包絡線)と接線の関係

Q. 地球のかたちを、地球の外に出ることなく知るには？

「生え方」を調べる: 接平面を例に

接平面の「生え方」を調べる＝曲面のかたちを調べる

※わかる人向けの注: 曲線(包絡線)と接線の関係

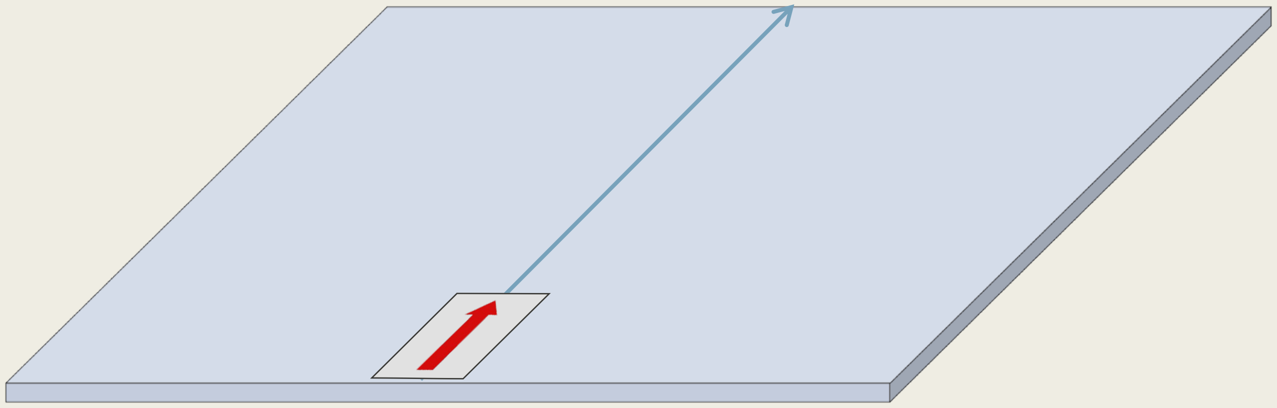
Q. 地球のかたちを、地球の外に出ることなく知るには？

地球の表面の「曲がり具合」を、外に出ることなく調べる

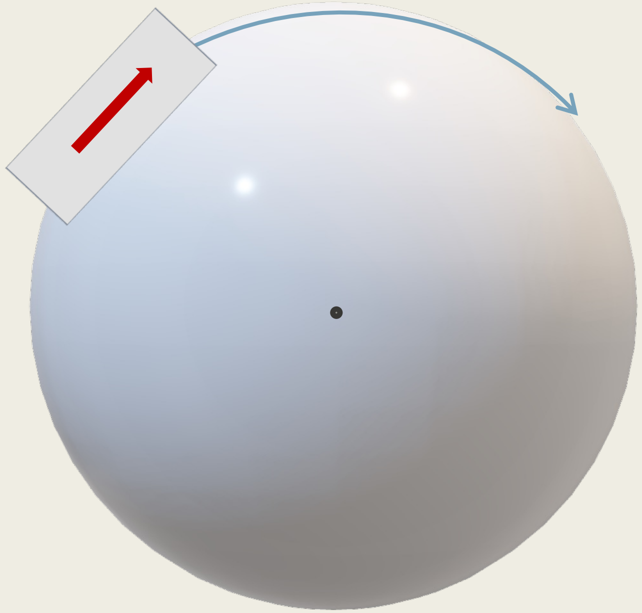
平面の上を「平行移動」する

平行移動＝ 接平面の方向にわずかに動かす、ということの繰り返し

- 平行移動は「接平面の生え方の、経路に沿った変化」を見ている



平らな板の上で平行移動



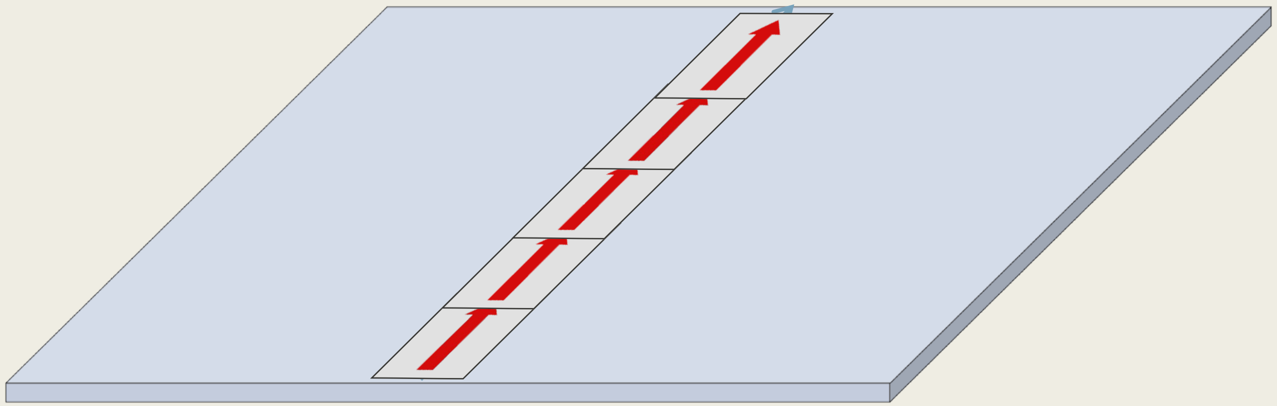
ボールの上で平行移動

PHYSICS LAB. 2024

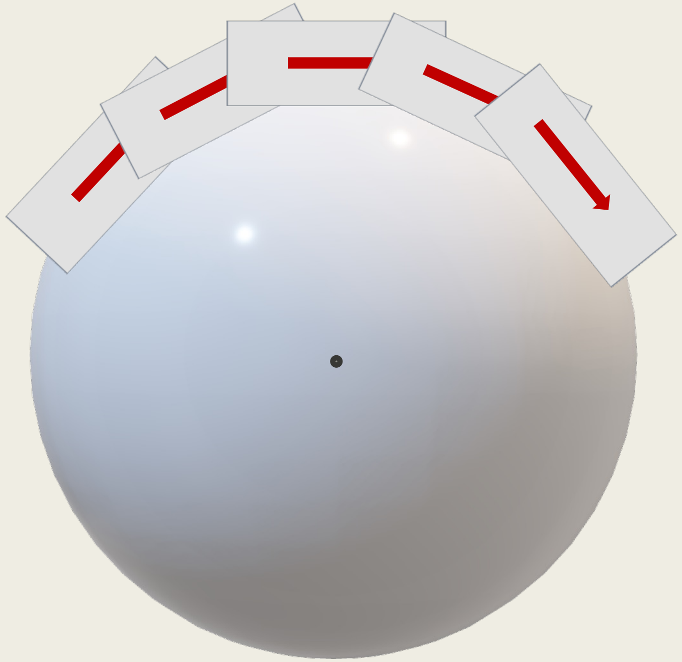
平面の上を「平行移動」する

平行移動＝ 接平面の方向にわずかに動かす、ということの繰り返し

- 平行移動は「接平面の生え方の、経路に沿った変化」を見ている



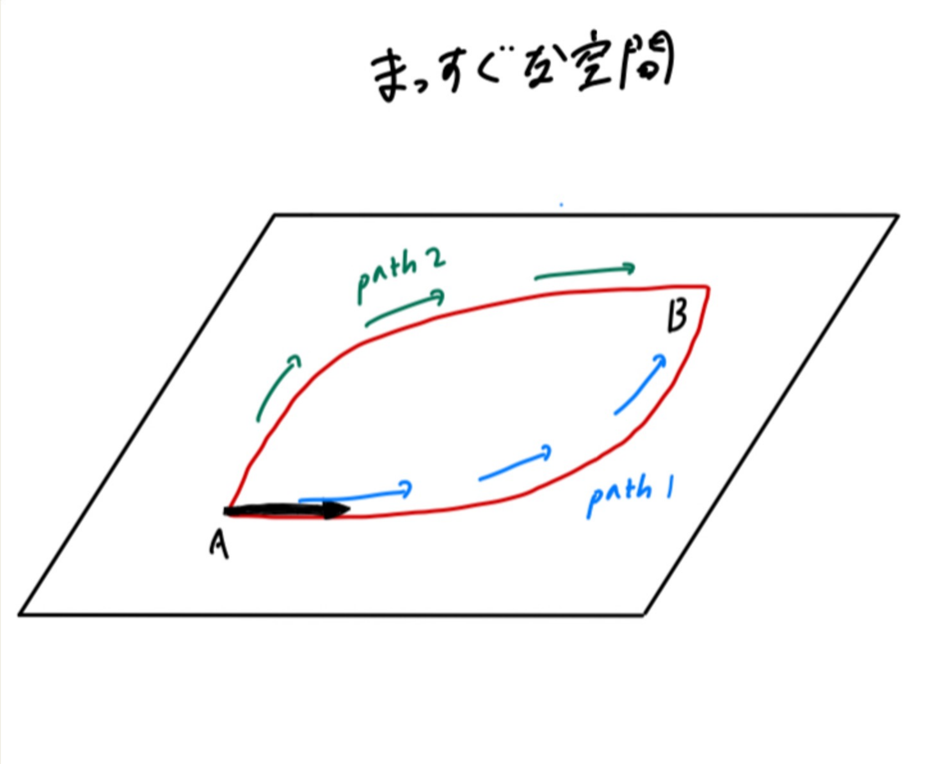
平らな板の上で平行移動

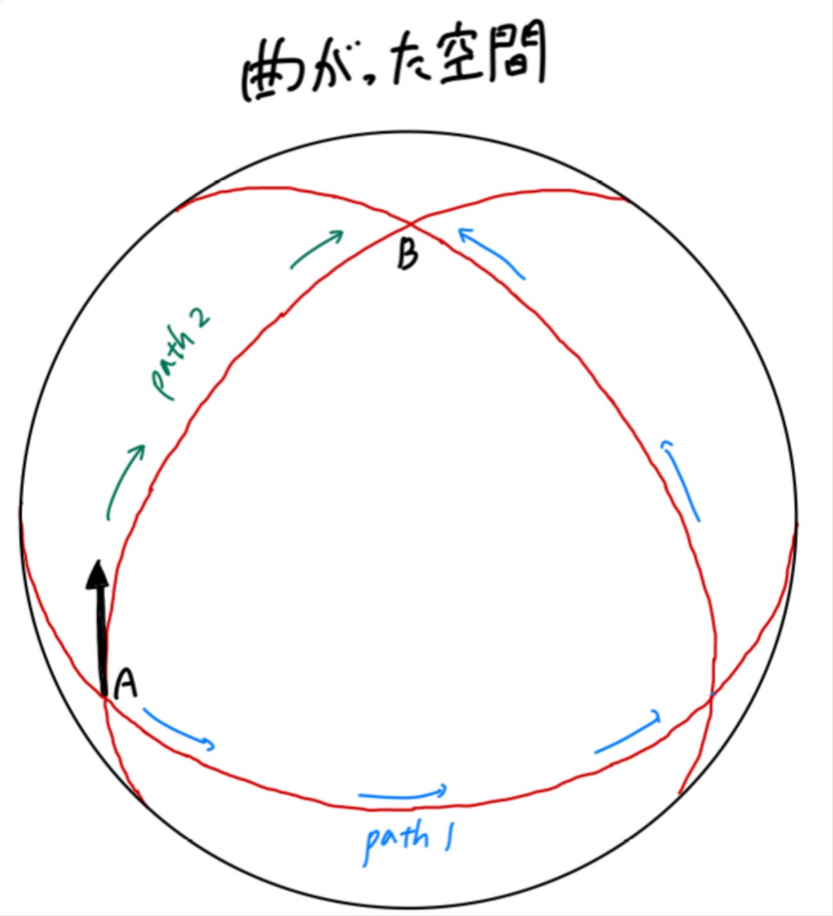


ボールの上で平行移動

「曲がっている」ことの特徴づけ

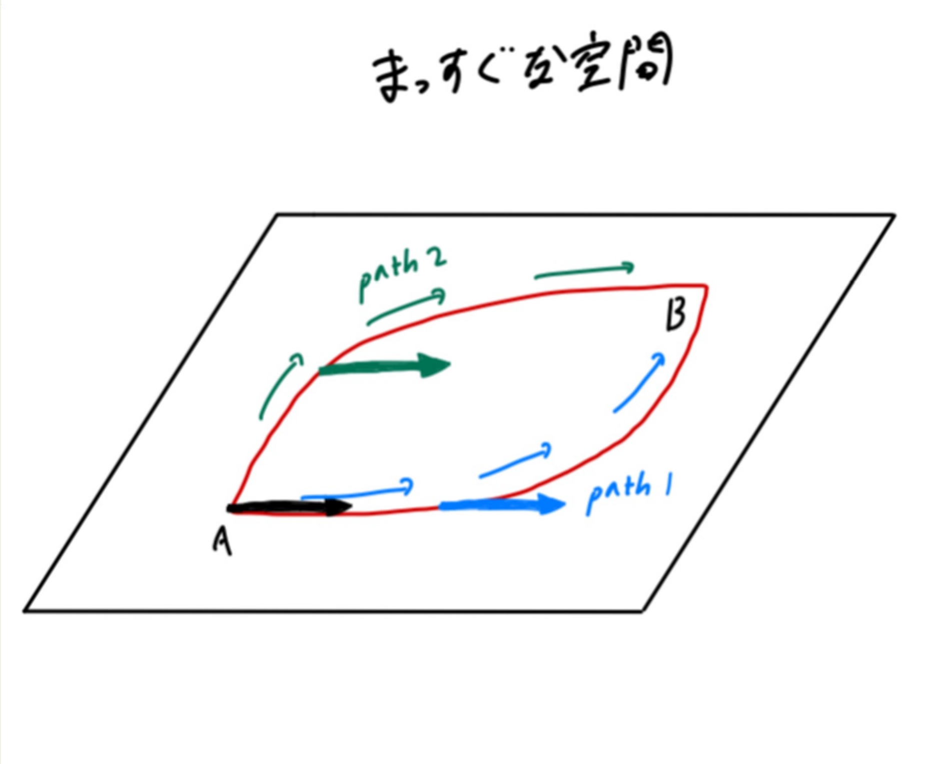
2つの異なった経路に沿って、接ベクトルを平行移動してみると、

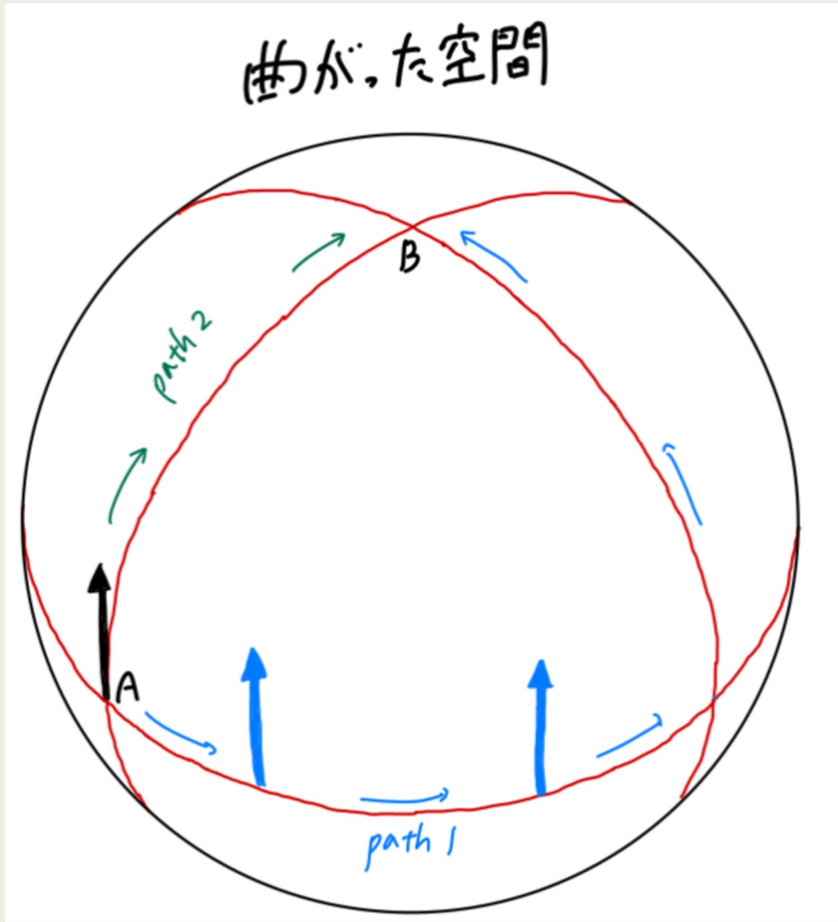




「曲がっている」ことの特徴づけ

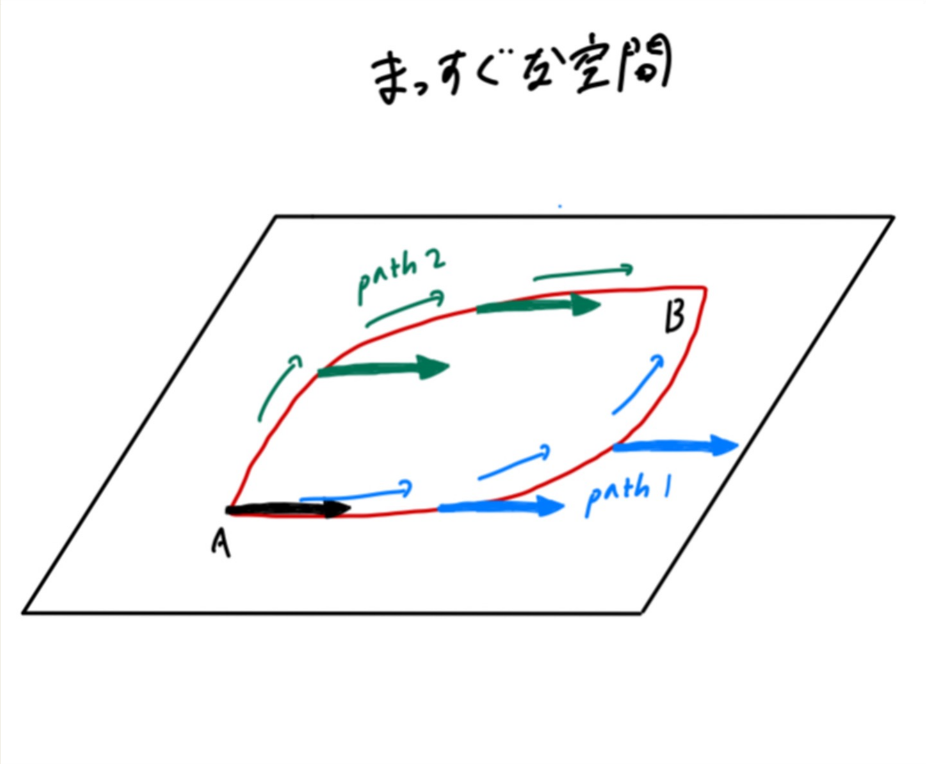
結果はこうなる。

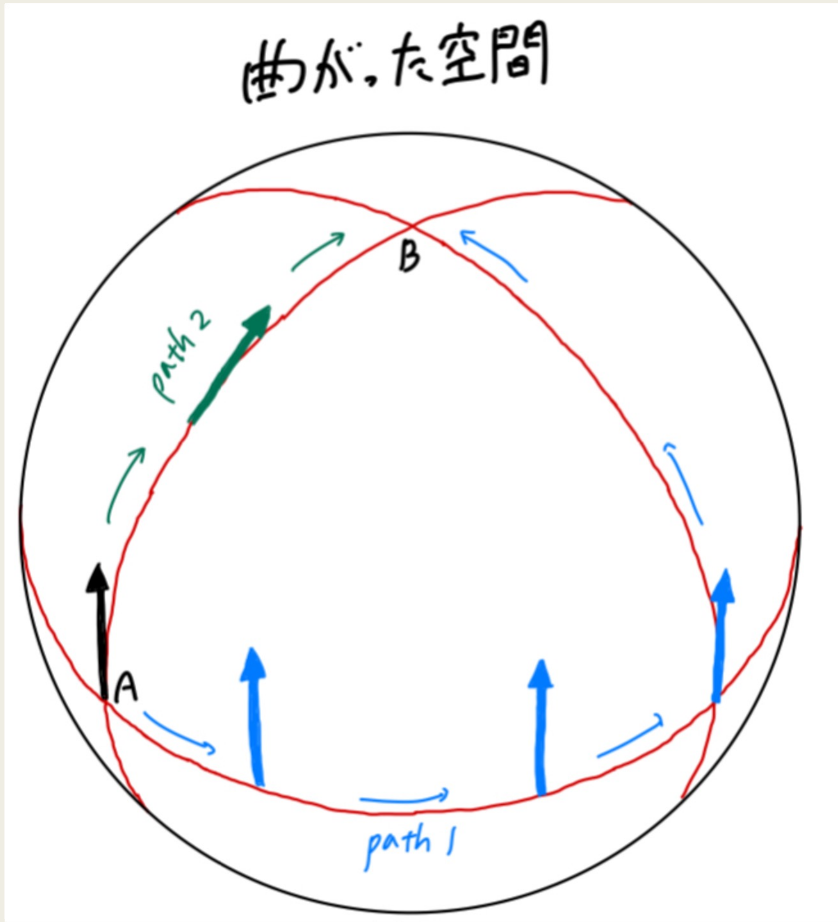




「曲がっている」ことの特徴づけ

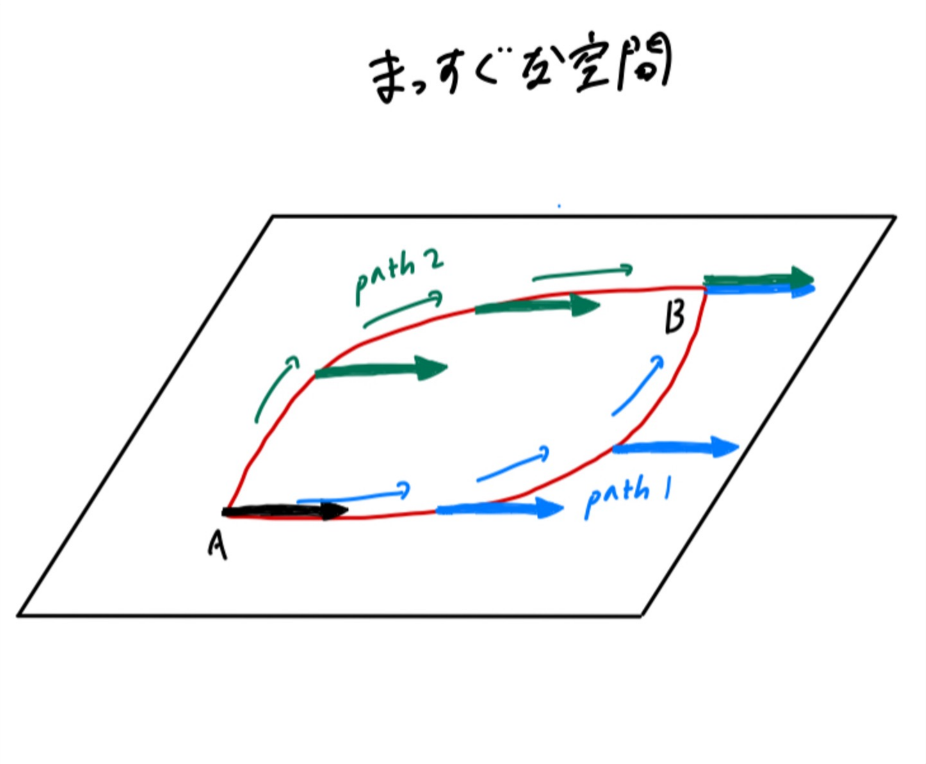
結果はこうなる。



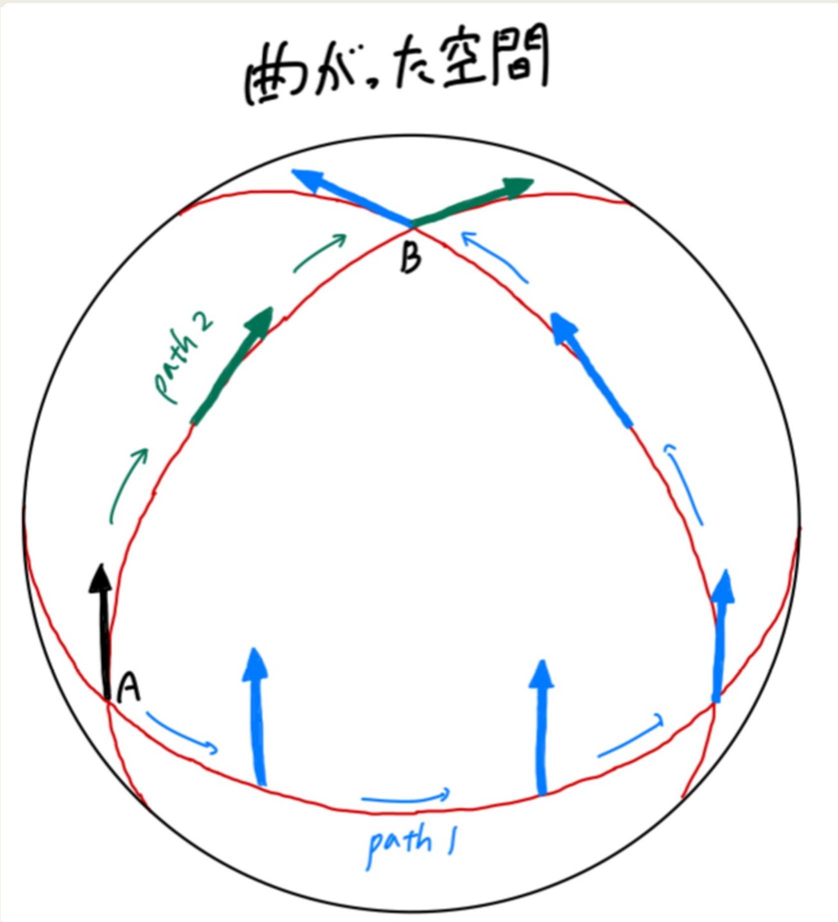


「曲がっている」ことの特徴づけ

結果はこうなる。



ルートが違っても、平行移動の結果は同じ



ルートが違うと、平行移動の結果が変わる

re: 空間の「生え方」を調べる

空間が曲がっていると、平行移動の結果が経路によって変わる

- 曲がり具合↔動かす経路(方向)によって平行移動の結果に生じる差
- まっすぐな空間では、このような差は0になる

この「曲がり具合」を、空間全体にわたって足し合わせる

→それが0にならない時、まっすぐな空間とトポロジカルに異なる！

- 「曲がり具合の足し合わせ」は、連続変形で0にできない

状態空間のトポロジー

状態空間に対しても、固有空間の「生え方」を調べる

- 生え方の「曲がり具合」＝動かす方向による、生え方の「差」の違い

生え方の「曲がり具合」を空間全体で足し合わせて、それが0にならないとき、電子の「住む」状態空間は非自明なトポロジーをもつ

→この時、トポロジカルに安定な物理現象が出現する！

状態空間のトポロジー

状態空間に対しても、固有空間の「生え方」を調べる

- 生え方の「曲がり具合」＝動かす方向による、生え方の「差」の違い

生え方の「曲がり具合」を空間全体で足し合わせて、それが0にならないとき、電子の「住む」状態空間は非自明なトポロジーをもつ

→この時、トポロジカルに安定な物理現象が出現する！

ちなみに、これを式で書くと、パラメータ空間が2次元の場合にはこうなる。

$$\nu_n^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega d^2\boldsymbol{R}\ \epsilon^{ij}\left(\frac{\partial a_{n,j}}{\partial R_i} - \frac{\partial a_{n,i}}{\partial R_j}\right) \qquad a_{n,i}(R) = -i\langle n, R|\nabla_R|n, R\rangle$$

動かす方向による「差」の違い↑

空間の生え方(骨組み)の「差」↑

例: 量子ホール効果

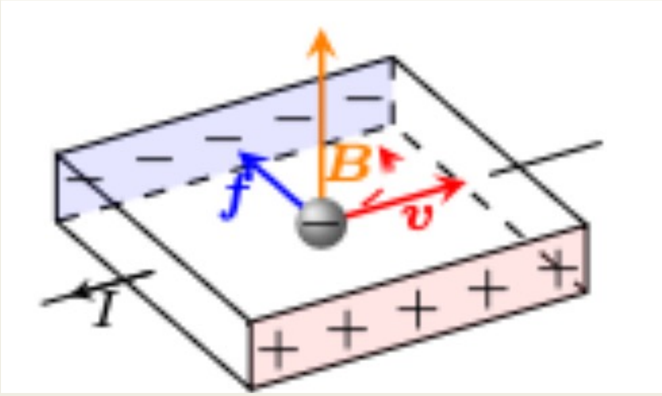
(ふつうの)ホール効果:
「磁場をかけると、それと垂直な向きに電流が流れる」

[量子ホール効果の設定]

- (例えば)半導体と絶縁体をくっつける
- 磁場をかけて、境界面での電子の動きをみる

すると……

- 2次元平面のはじっこ(エッジ)にだけ、電流が流れる
- 電気伝導度の値がとびとび(離散的)になる



統計物理班企画ポスターより引用

量子ホール効果

「曲がり具合」を足し合わせると、飛び飛びの値になる

→状態空間が非自明なトポロジーをもつ

- 曲がり具合は、電子の「動きやすさ」＝伝導度に関与

量子ホール効果

「曲がり

→状態空

- 曲がり

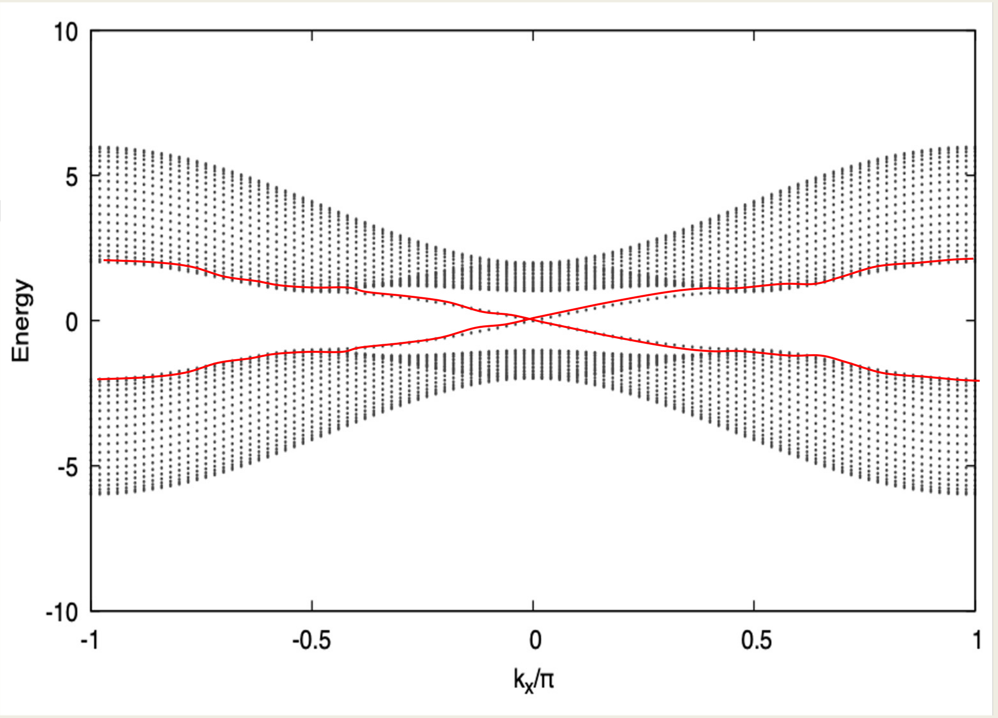
$$
\begin{aligned}
\sigma_{xy} &= -\frac{ie^2}{\hbar L^2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{n\neq m} f(E_{n\boldsymbol{k}})\Bigg(\langle\frac{\partial}{\partial k_x}u_{n\boldsymbol{k}}|u_{m\boldsymbol{k}}\rangle\langle u_{m\boldsymbol{k}}|\frac{\partial}{\partial k_y}u_{n\boldsymbol{k}}\rangle \\
&\qquad -\langle\frac{\partial}{\partial k_y}u_{n\boldsymbol{k}}|u_{m\boldsymbol{k}}\rangle\langle u_{m\boldsymbol{k}}|\frac{\partial}{\partial k_x}u_{n\boldsymbol{k}}\rangle\Bigg) \\
&= -\frac{ie^2}{\hbar L^2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{n} f(E_{n\boldsymbol{k}})\Bigg(\langle\frac{\partial}{\partial k_x}u_{n\boldsymbol{k}}|\frac{\partial}{\partial k_y}u_{n\boldsymbol{k}}\rangle - \langle\frac{\partial}{\partial k_y}u_{n\boldsymbol{k}}|\frac{\partial}{\partial k_x}u_{n\boldsymbol{k}}\rangle\Bigg) \\
&= -\frac{ie^2}{\hbar L^2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{n} f(E_{n\boldsymbol{k}})\Bigg(\frac{\partial}{\partial k_x}\langle u_{n\boldsymbol{k}}|\frac{\partial}{\partial k_y}u_{n\boldsymbol{k}}\rangle - \frac{\partial}{\partial k_y}\langle u_{n\boldsymbol{k}}|\frac{\partial}{\partial k_x}u_{n\boldsymbol{k}}\rangle\Bigg)
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

量子ホール効果

「曲がり具合」を足し合わせると、飛び飛びの値にた

→状態空間が非自明なトポロジーをもつ

- 曲がり具合は、電子の「動きやすさ」＝伝導度に関与



「波数」に対するエネルギーの依存性を図示する

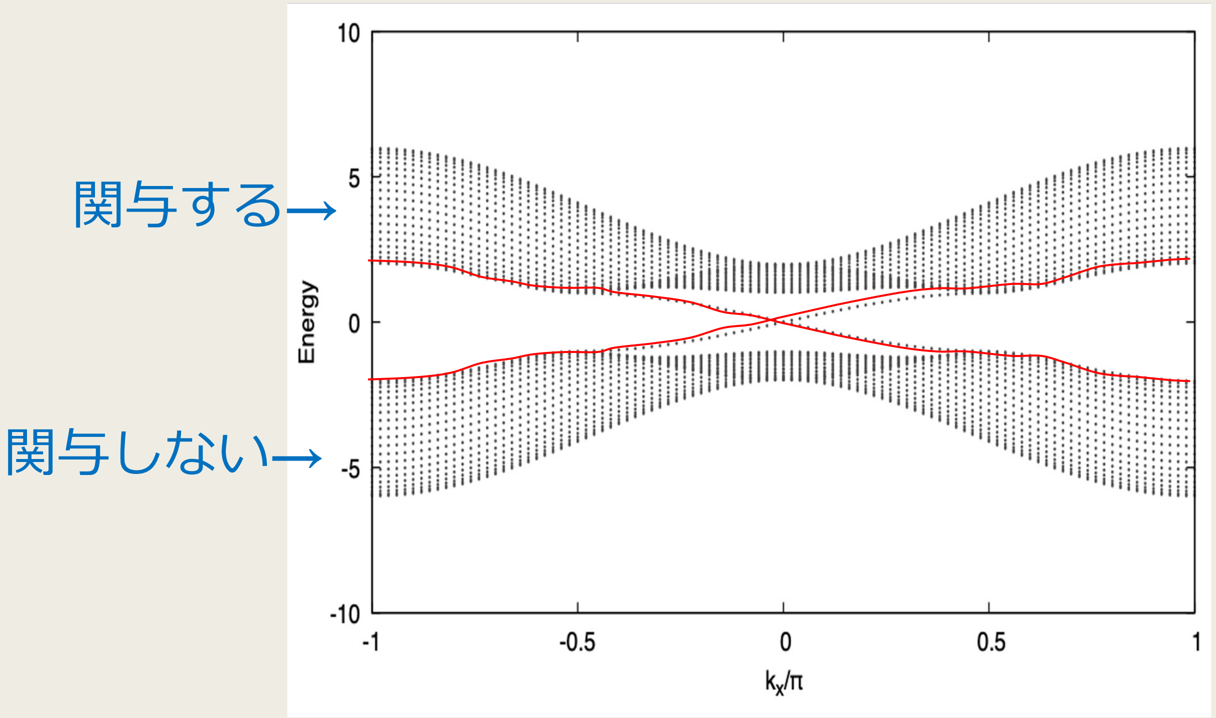
- エネルギーが「一周して元に戻らない」状態(赤)がある

→このような「変わった」依存性が、非自明なトポロジーをつくる

量子ホール効果

エネルギーが下の領域→電気伝導に関与しない

上の領域→関与する



量子ホール効果

エネルギーが下の領域→電気伝導に関与しない

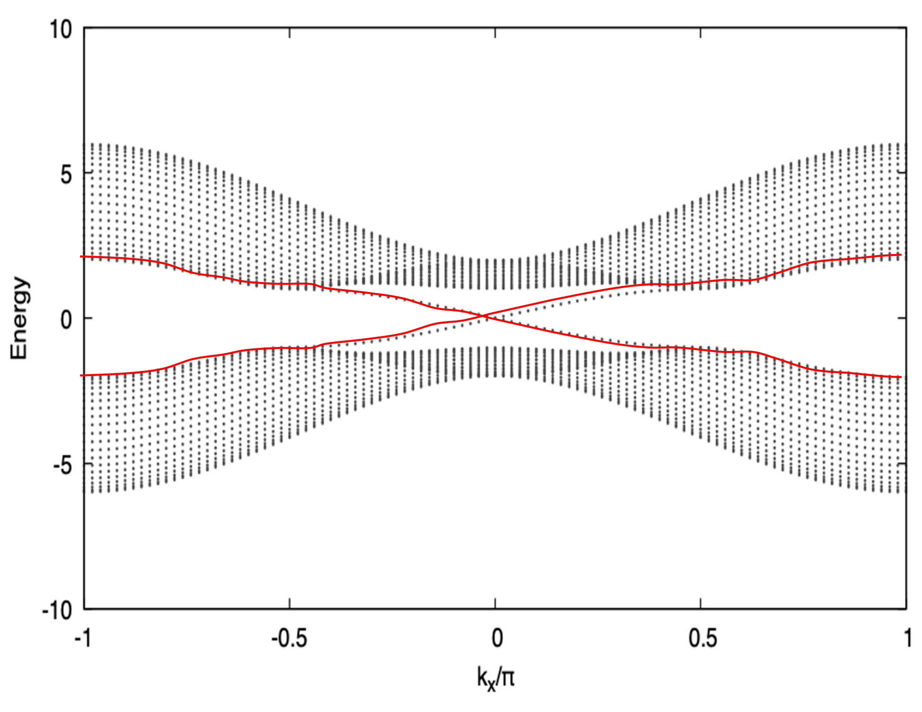
上の領域→関与する

- 赤線の状態は、「端」でのみ伝導に関与*

→端のみにおいて電流を生む「エッジ状態」

*これは**空間的に**局在した電流を生む状態。

- 内部では絶縁体だが、端には電流が流れる



状態空間の非自明なトポロジーが、エッジ状態という非自明な物理として現れる

トポロジカル物性つづき

トポロジカル超伝導体

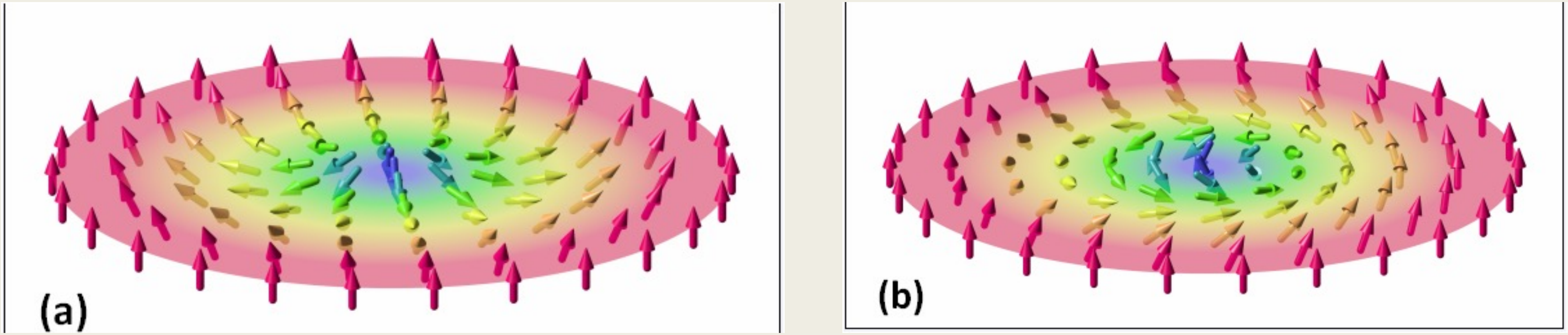
- 「超伝導ギャップ」が境界でのみ消える、非自明な「エッジ状態」が出現
- 量子ホール効果と「境界で異なる物理が現れる」点で似ている！

内部(バルク)と境界(エッジ)で異なる物理が出現する

トポロジカル物性つづき2

(磁気)スキルミオン構造: 電子のスピンの向きが非自明な秩序をつくる

■ 「物体の各位置におけるスピンの向き」がつくる空間のトポロジー



Wikipediaより引用

まとめ

- トポロジー＝「連続変形させても変わらない性質」を調べる学問。
- 物理学では、空間の「かたち」が重要になる
- 電子の「住む」状態空間は、「空間の上に空間が生えている」構造
- 状態空間がトポロジカルに非自明な「生え方」を持つとき、不思議なふるまい(**トポロジカル物性**)を示す状態が出現する

まとめ

- トポロジー＝「連続変形させても変わらない性質」を調べる学問。
- 物理学では、空間の「かたち」が重要にな
- 電子の「 … 間の上に空間が生えている」構造
- … 空間がトポロジカルに非自明な「生え方」を持つとき、不思議なふるまい(**トポロジカル物性**)を示す状態が出現する

面白いかたちが、面白い物理を引き起こす

参考文献: 野村健太郎「トポロジカル絶縁体・超伝導体」他