



AdS/CFT 的幸福術

唐崎 太陽

1 はじめに

「このポスターに幸運にも辿り着いたそのあなた...

『実はこの宇宙はある別の世界の投影像、**ホログラム**でできている...』

という驚愕のこの世の真理をご存知でしょうか...？私とともに時間と空間を操り、幸福への旅に向かいましょう...

やれやれ最近流行りの“物理学的思考術”ね... そう思い立ち去ろうとしているその君、ちょっと待ったァ！

実はこの主張は**ホログラフィ原理**と呼ばれ最先端の物理として盛んに研究されているんです。本ポスターではホログラフィ原理の一例である**AdS/CFT 対応**を通し、具体的にホログラフィ原理が成り立つ姿を目の当たりにし、皆さんに入信していただくことを目標とします。

2 AdS/CFT 対応

AdS/CFT 対応

“ $d+1$ 次元 AdS 時空での量子重力理論”と“その境界上での共形場理論”が等価である

これが物理用語で述べた AdS/CFT 対応の主張です。一つずつ整理していきましょう。

AdS 時空とは Einstein 方程式において宇宙定数を負とした時の解の時空で、

$$X_0^2 + X_{d+1}^2 - \sum_{k=1}^d X_k^2 = l^2$$

で指定される $d+2$ 次元空間 $\mathbb{R}^{2,d}$ に $d+1$ 次元の超曲面として埋め込むことができます。AdS/CFT 対応では、この時空上での**量子重力理論**を考えます。

一方、共形場理論とは共形対称性という角度を保つ自由な変換の下で理論が不

変な性質を持った**場の量子論**です。

この全く別の理論に見える両者が見実は**同じ結果を与える**という主張が AdS/CFT 対応です。これだけ聞いても何のことやら... そんな皆さんへ百聞は一見に如かずその目で本当に一致するさまを見ていただきますましょう！

3 BH エントロピー

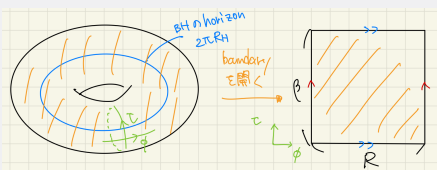
今回は“共形場理論を用いて”AdS 時空における**Black Hole のエントロピー**を計算してみましょう！そのためにゴールとなる BH のエントロピーについて紹介します。以下のように BH のエントロピーは horizon の**表面積** A_{BH} に比例することが知られています。

Black Hole エントロピー公式

$$S = \frac{A_{\text{BH}}}{4G}$$

この BH エントロピーの面積則を再現することが本ポスターでの目標です。

今回は 3 次元 AdS 時空における BH 解として**BTZ BH**という中身の詰まったトラス型の時空を考えます⁽¹⁾。



4 有限温度 CFT とその具体的な計算

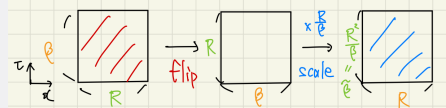
それではこの時空の境界に住む CFT はどのような理論なのでしょう？ BTZ BH の境界はトラス つまり両端に周期境界条件がついた平面で、特に時間方向の周期境界条件を持つ理論は、**有限温度**の理論に対応します。

この平面上での分配関数を計算しまし

よう！共形対称性により、座標軸の入れ替え、スケール変換が許され、この理論はモジュラー不変性

$$Z_{\text{CFT}}(\beta) = Z_{\text{CFT}}\left(\frac{R^2}{\beta}\right)$$

を持ちます。



$\tilde{\beta} := \frac{R^2}{\beta}$ とすると $\beta \rightarrow 0$ で $\tilde{\beta} \rightarrow \infty$ つまり高温極限を絶対零度極限で書き換えることができます。絶対零度では基底状態のみが寄与するので $Z_{\text{CFT}}(\tilde{\beta})$ は

$$Z_{\text{CFT}}(\tilde{\beta}) \rightarrow \exp(-\tilde{\beta}E_0)$$

となり⁽²⁾、関係式 $Z(\beta) = Z(\tilde{\beta})$ より

$$Z_{\text{CFT}}(\beta) \rightarrow e^{-\beta E_0} = e^{-\frac{R^2}{\beta} \frac{c\pi}{6R}}$$

のように分配関数が計算できます。なのでエントロピーは

$$S(\beta) = (1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta}) \log Z_{\text{CFT}} = \frac{c\pi R}{3\beta}$$

と計算できます。これに AdS/CFT 双方のエネルギー運動量テンソルの変換則から導かれる**Brown-Henneaux の式**

$$c = \frac{3l}{2G}$$

及び重力側から指定されるパラメタの値

$$\beta = \frac{2\pi l^2}{R_H}, R = 2\pi l \text{ を代入すると}$$

$$S(\beta) = \frac{2\pi R_H}{4G}$$

と BH の面積則を再現しました！

全く異なる 2 つの理論から全く同じ結果が導かれましたね！あ～**幸せ～**

皆さんもホログラフィ教に入信し、共に分配関数を求め、幸せになりませんか？

参考文献

- [1] 宇賀神 知紀. 創発するブラックホール量子情報理論と AdS/CFT 対応からのアプローチ. Vol. 205. SGC ライブラリ. サイエンス社, 2025.

(1) 計量 $ds^2 = -\frac{r^2 - R_H^2}{l^2} dt^2 + \frac{l^2}{r^2 - R_H^2} dr^2 + r^2 d\phi^2$ に $\phi \sim \phi + 2\pi$ の同一視及び時間方向の Euclid 化をしたものが BTZ BH です。(R_H は horizon 半径)

(2) トラス上の CFT のカシミヤエネルギー $E_0 = -\frac{c\pi}{6R}$ を用いました。

